

Soluții și bareme orientative

Clasa a XI-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Numărul de schimbări efectuate sunt date de permutarea: $\sigma = \begin{pmatrix} S & T & E & F & A & N \\ F & A & N & E & S & T \end{pmatrix}$ a mulțimii de litere $M = \{S, T, E, F, A, N\}$. Schimbările efectuate sunt transpoziții ale mulțimii M . Vom schimba literele mulțimii M , în mod bijectiv, cu cifrele $1, 2, \dots, 6$, astfel încât σ se scrie sub forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1p)$$

$$\sigma = \zeta_{56} \cdot \zeta_{45} \cdot \zeta_{34} \cdot \zeta_{26} \cdot \zeta_{15} \quad (2p)$$

b) Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) \end{pmatrix}$. Întrucât $\sigma x = x\sigma$ trebuie să avem $\sigma(x(k)) = x(\sigma(k)), \forall k = \overline{1,5}$. Astfel:

$$\begin{aligned} \sigma(x(1)) &= x(\sigma(1)) = x(2), \\ \sigma(x(2)) &= x(\sigma(2)) = x(3), \\ \sigma(x(3)) &= x(\sigma(3)) = x(1), \\ \sigma(x(4)) &= x(\sigma(4)) = x(5), \\ \sigma(x(5)) &= x(\sigma(5)) = x(4). \end{aligned}$$

(1p)

În concluzie soluțiile din S_5 ale ecuației $\sigma x = x\sigma$ sunt:

$$\begin{aligned} x_1 = e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \\ x_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3p)

2. Prima ecuație se scrie echivalent $A(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det(A+B) \neq 0$. (3p)

Pe de altă parte, adunând cele două ecuații obținem $(A+B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde

$\det(A+B) = 0$, contradicție cu relația obținută mai sus. (4p)

3. a) Avem:

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{n+k}}, \text{ deci } 1 \leq x_n \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}, \text{ adică } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \quad (2p)$$

b) Prin inducție matematică se demonstrează că:

$$a_n = \frac{(1+(x_n-1))^n + (1-(x_n-1))^n}{2} - \frac{(x_n)^n + (2-x_n)^n}{2},$$

$$b_n = \frac{(1+(x_n-1))^n - (1-(x_n-1))^n}{2} - \frac{(x_n)^n - (2-x_n)^n}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n.$$

(3p)

Limita se scrie, astfel: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)}$, iar pe de altă parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n+k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n+k}} + 1 \right)}.$$

Dar

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n+k}} \right)} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n+1}} + 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$\text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{În concluzie: } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = \sqrt{2}.$$

(2p)

$$4. \frac{1}{2} \cdot a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)-1}{2^{k+1}} = a_n - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot (1-2^{-n}).$$

$$\text{Așadar } a_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}, \text{ adică } a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

(2p)

$$b_n = \frac{2^n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot (2 - a_n) = \frac{2^n}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot (2 - a_n) = u_n \cdot v_n, \text{ unde } u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n} e \text{ și}$$

(2p)

$$v_n = \frac{2 - a_n}{\frac{n}{2^n}} = \frac{x_n}{y_n}, \text{ unde } x_n = 2 - a_n \rightarrow 0 \text{ și } y_n = \frac{n}{2^n} \rightarrow 0.$$

(1p)

$$\text{Aplicăm lema Stolz (caz } \frac{0}{0}): \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n-1} \xrightarrow{n} 1.$$

(1p)

$$\text{Deci } v_n = \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n} 1 \text{ și } b_n = u_n \cdot v_n \xrightarrow{n} e.$$

(1p)