OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a IX-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1, autor ***

Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care ecuaţia $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=a$ are soluţie. Notaţia $\{t\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real t.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Mulţimea este $A=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	**2p**
Dacă $\{x\}<\frac{1}{2}$, atunci $E(x)=\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=2\{x\}+\frac{1}{2}\in A$, iar dacă $\{x\}\geq\frac{1}{2}$, atunci $E(x)=2\{x\}-\frac{1}{2}\in A$, deci pentru a avea soluţie trebuie ca $a\in A$	**3p**
Pentru $a\in A$ avem soluţia $x=\frac{2a-1}{4}$	**2p**

Problema 2, (autor ***)

Se consideră un patrulater convex $ABCD$, O intersecţia diagonalelor sale, un număr real $a>0$ şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(DA)$ astfel încât

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{DQ}{QA}=a.$$

a) Arătaţi că, dacă $a=1$, atunci $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$.

b) Arătaţi că, dacă $a\neq 1$ şi $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) M,N,P,Q sunt mijloacele laturilor, deci $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ şi analoagele	**2p**
Rezultă $2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OQ}$, de unde concluzia	**1p**
b) $(a+1)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}$ şi analoagele	**2p**
Din ipoteză, relaţiile precedente şi $a\neq 1$ reiese $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{v}$	**1p**
Dacă vectorul $\vec{v}$ nu este nul, atunci el are direcţia ambelor diagonale – fals. Deci, diagonalele se taie în părţi egale şi patrulaterul este paralelogram	**1p**

Problema 3, autor a)***, autor b) *Alin Pop*, SGM 12/2018

a) Determinaţi numărul tripletelor (a,b,c) de numere naturale, cu $0 \leq a < b < c \leq 100$ şi a,b,c în progresie aritmetică.

b) Trei termeni a,b,c (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii geometrice sunt numere naturale şi au suma număr par. Demonstraţi că numerele a, b şi c sunt pare.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) b poate fi orice numar de la 1 la 99	**1p**
Pentru fiecare $b \leq 50$, a poate lua b valori (iar $c = 2b - a$), iar pentru $b \geq 51$, c poate lua $100 - b$ valori (iar $a = 2b - c$)	**2p**
Numarul tripletelor este $(1+2+\ldots+50)+(49+48+\ldots+1)=2500$	**1p**
b) Presupunem concluzia falsă. Atunci, de exemplu, a este par şi b, c sunt impare	**1p**
Atunci raţia q a progresiei verifică relaţii de forma $q^m = \frac{b}{a}$, $q^n = \frac{c}{a}$, cu m, n numere întregi nenule distincte. Rezultă $\frac{b^n}{a^n} = \frac{c^m}{a^m}$, de unde $b^n = a^{n-m}c^m$, cu a par, b, c impare şi $n-m$ întreg nenul – imposibil	**2p**

Problema 4, autor a) ***, autor b) ***, SGM 12/2018

Pentru x număr real definim $a_1(x) = |x-1|$ şi $a_{n+1}(x) = |a_n(x) - 1|$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Arătaţi că, pentru orice număr real x, mulţimea $\{a_n(x) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

b) Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $a_{2019}(x) = 1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $k = [a_1(x)]$; avem $k \geq 0$. Pentru $k \geq 1$ obţinem $a_2(x) = a_1(x) - 1$, după care $a_3(x) = a_2(x) - 1 = a_1(x) - 2$, ... , $a_{k+1}(x) = a_1(x) - k = a \in [0,1)$; această ultimă concluzie este valabilă şi pentru $k = 0$	**1p**
Următorii termeni ai şirului $(a_n(x))_{n\geq 1}$ sunt $1-a, a, 1-a, a, \ldots$, deci mulţimea din enunţ este $\{a, a+1, \ldots, a+k\} \cup \{1-a\}$	**1p**
b) Observăm că orice soluţie este număr întreg	**1p**
Pentru x întreg, $a_n(x)$ şi $a_{n+1}(x)$ au parităţi opuse, deci $a_1(x)$ trebuie să fie impar	**1p**
Din prima parte a raţionamentului de la a) rezultă $a_1(x) \leq 2019$	**1p**
Orice x pentru care $a_1(x) \in \{1,3,5,\ldots,2019\}$ este soluţie, deci avem 2020 de soluţii	**2p**