Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, 4 aprilie 2018
Clasa a X-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in (1, \infty)$. Demonstraţi că funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin relaţia

$$f(x) = (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x,$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$, este strict crescătoare.

Soluţie şi barem: Vom realiza demonstraţia prin inducţie matematică.

Pentru $n = 2$, fie $a_1, a_2 \in (1, \infty)$. Avem

$$f(x) = (a_1 a_2)^x - a_1^x - a_2^x = (a_1^x - 1)(a_2^x - 1) - 1.$$

Deoarece funcţiile $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definite prin relaţiile $f_1(x) = a_1^x - 1$ şi $f_2(x) = a_2^x - 1$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$, sunt strict crescătoare şi pozitive, rezultă că f este strict crescătoare. **3p**

Presupunem proprietatea este adevărată pentru oricare n numere din $(1, \infty)$ şi o demonstrăm pentru $n + 1$ numere $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} \in (1, \infty)$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1 a_2 ... a_n a_{n+1})^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x - a_{n+1}^x \\ &= \left((a_1 a_2 ... a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_{n+1}^x\right) + \left((a_1 a_2 ... a_n)^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x\right). \end{aligned}$$

Funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = (a_1 a_2 ... a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_{n+1}^x$ este strict crescătoare deoarece $a_1 a_2 ... a_n > 1$ şi $a_{n+1} > 1$ (cazul $n = 2$).

Funcţia $h : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x$ este strict crescătoare conform ipotezei de inducţie. Atunci $f = g + h$ este strict crescătoare.

Rezultă că proprietatea din enunţ este demonstrată. **4p**

Problema 2. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 1)$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OAC şi respectiv OAB. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$.

Soluţie şi barem: Dacă triunghiul ABC este echilateral, avem $AG_1 = BG_2 = CG_3 = \dfrac{4}{3}$, de unde obţinem $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$. **1p**

Reciproc, considerăm planul complex ABC cu originea în O. Notăm cu p afixul unui punct P din planul complex considerat. Avem $g_1 = \dfrac{b+c}{3}, g_2 = \dfrac{c+a}{3}$ şi $g_3 = \dfrac{a+b}{3}$. **1p**

Egalitatea $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$ este echivalentă cu $\sum \left| a - \dfrac{b+c}{3} \right| = 4$, sau $\sum |3a - b - c| = 12$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Deoarece $h = a + b + c$, conform teoremei lui Sylvester, egalitatea precedentă este echivalentă cu $\sum |4a - h| = 12$. **2p**

Atunci

$$\begin{aligned} 144 &= \left(\sum |4a-h\ |\right)^2 \leq 3\sum |4a-h\ |^2 = 3\sum \left(16\,|a|^2 - 4a\overline{h} - 4\overline{a}h + |h|^2\right) \\ &= 144 - 12\overline{h}\sum a - 12h\sum \overline{a} + 3\,|h|^2 = 144 - 21\,|h|^2 . \end{aligned}$$

Obţinem $|h|^2 \leq 0$, deci $|h| = 0$. Rezultă $O = H$, deci triunghiul ABC este echilateral. **3p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Demonstraţi că, pentru orice numere complexe $a_1, a_2, ..., a_n$ şi $b_1, b_2, ..., b_n$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z-b_k|^2$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$.

Soluţie şi barem: $b) \Rightarrow a)$ Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 &= n\,|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \\ &\leq n\,|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{b}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} |z-b_k|^2 , \end{aligned}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. **1p**

$a) \Rightarrow b)$ Alegând $z = 0$, obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$. **1p**

Notăm $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ şi $b = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $a \neq b$. Fie $z = (1-t)\,a + tb$, unde $t \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 &= n\,|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \\ &= (n-1)\,|z|^2 + |z|^2 - z\overline{a} - \overline{z}a + |a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - |a|^2\right) \\ &= (n-1)\,|z|^2 + |z-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - |a|^2\right) \\ &= (n-1)\,|z|^2 + t^2\,|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - |a|^2\right). \end{aligned}$$

Analog avem $\sum\limits_{k=1}^{n} |z-b_k|^2 = (n-1)\,|z|^2 + (1-t)^2\,|b-a|^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2 - |b|^2\right)$. **2p**

Atunci

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |z-b_k|^2 \\ &= 2t\,|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - |a|^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - |b|^2\right) - |b-a|^2 . \end{aligned}$$

Pentru

$$t > \frac{|b-a|^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2 - |b|^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 - |a|^2\right)}{2\,|b-a|^2},$$

este contrazisă ipoteza. Atunci $a = b$. **3p**

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Pentru numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$, notăm $S_0 = 1$ şi

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k},$$

suma tuturor produselor de câte k numere alese dintre $a_1, a_2, ..., a_n$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Determinaţi numărul n-uplurilorr $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru care are loc relaţia:

$$(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - ...)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - ...)^2 = 2^n S_n.$$

Soluţie şi barem: Are loc identitatea

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + i) = (S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \cdots) + i(S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-4} - \cdots).$$

.... **1p**

Rezultă

$$\begin{aligned} &(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \cdots)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-4} - \cdots)^2 \\ = &\left|\prod_{k=1}^{n} (a_k + i)\right|^2 = \prod_{k=1}^{n} |\ a_k + i|^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(\ a_k^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\ a_k^2 + 1\right) = 2^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

.... **2p**

Din inegalităţile $a_k^2 + 1 \geq 2\,|a_k|$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rezultă că egalitatea în relaţia din enunţ are loc dacă şi numai dacă $|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n| = 1$, iar numărul de valori egale cu -1 este par. **2p**

Prin urmare, numărul n-uplelor $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru care are loc relaţia din enunţ este

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}.$$

.... **2p**