

CLASA A XII-A - BAREM

SUBIECTUL 1

$A_x \cdot A_y = A_{xy}$, cu $xy \neq 0$, deci G este parte
stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ (2 puncte)

A_1 , elem. neutru (1 punct), $A_{1/x}$ simetricul
lui A_x (1 punct)

$f: \mathbb{R}^* \rightarrow G$, $f(x) = A_x$
este bijectiv (2 puncte), $f(xy) = f(x)f(y)$ (1 punct)

SUBIECTUL 2

f injectiv (2 puncte), surjectiv (2 puncte)

~~f~~ $[0, 1] \rightarrow [0, 2]$ bijectiv (1 punct)

$x = f(t)$, $t \in [0, 1]$ schimbare de variabilă
(1 punct), deci $I = 4/3$ (1 punct)

SUBIECTUL 3

Soluție. Avem 2 puncte

$$a_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{n^2}{k^2}\right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2}} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^2 \cdot b_n,$$

unde $b_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$ 2 puncte

Din criteriul radicalului obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Pe de altă parte, cum $\ln b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$, rezultă că

2 puncte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx =$$

$$= \ln 2 - 2(x - \arctg x) \Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

În consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2 \cdot e^{\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi}{2}}$.

1 punct

SUBIECTUL 4

4 puncte

Soluție. Fie $a \in Z(G)$ și $b \in G \setminus Z(G)$. Atunci $ab \in G \setminus Z(G)$, deci $(ab)^2 = e$, de unde $abab = e$, adică $aabb = e$. Cum $b^2 = e$, obținem $a^2 = e$, adică $x^2 = e$,

3 puncte

pentru orice $x \in G$, deci grupul este comutativ.

... elementele de aduna