



**Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015**

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuațiile:

(i) $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} = \frac{1}{2^x + 3^x}, x \in \mathbb{R}.$

(ii) $x + 2^x + \log_2 x = 7, x \in (0, \infty).$

2.

(i) Dacă $a, b \geq 2$ arătați că $\lg a + \lg b \geq \lg(a + b).$

(ii) Demonstrați că pentru orice $a, b, c \in [2, \infty)$ are loc inegalitatea $\log_{b+c} a + \log_{c+a} b + \log_{a+b} c \geq \frac{3}{2}.$

3.

Considerăm F mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(x) + f(x + f(x)) = 3x + 3, (\forall) x \in \mathbb{R}.$ Să se arate că:

(i) Mulțimea F conține cel puțin o funcție de gradul 1;

(ii) Dacă $f \in F$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are o unică soluție reală.

GM 2014

4. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe cu proprietatea că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3| = 1.$

(i) Să se arate că dacă $z_1 = z_2$ atunci $z_1 + z_3 = 0.$

(ii) Demonstrați că $(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1) = 0.$

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.