OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

08.02.2020

CLASA A XII A Bareme

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

a) Calculați $\int f(x)dx$,

b) Calculați $\int_1^2 xf(x^2)dx$.

Barem: a) $\int\frac{x}{x^2+1}dx \underset{dt=2xdx}{\overset{t=x^2+1}{=}} \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ **4p**

b) $\int_1^2 xf(x^2)dx \underset{2xdx=dt}{\overset{x^2=t}{=}} \frac{1}{2}\int_1^4 f(t)dt=\frac{1}{4}\ln(t^2+1)\Big|_1^4=\frac{1}{4}\ln\frac{17}{2}$ **3p**

2. *Ana, Bela și Carla* sunt nascute în 2000, 2001 și respectiv în 2002. Se consideră legea de compoziție "*" : „X*Y= persoana de vârstă mai mare dintre X și Y''

Alcătuiți tabla legii "*" pe mulțimea {*Ana, Bela , Carla*} și stabiliți dacă structura determinată este de monoid comutativ sau nu.

Barem: Tabla legii

*	A	B	C
A	A	A	A
B	A	B	B
C	A	B	C

.....**5p** cu interpretare monoid cu *e*=*A*............**2p**

3. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^n\frac{arctgx}{\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+x+1}dx\right)$

Barem: Notam termenul de sub limită cu I_n .

$arctgx\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, deci $I_n\le\frac{\pi}{2}\int_0^n\frac{1}{(n-1)x^2+nx+n}dx\le\frac{\pi}{2}\int_0^n\frac{1}{(n-1)x^2+n-1}dx$ **4p**

Deci $0\le I_n\le\frac{\pi arctgn}{2(n-1)}\le\frac{\pi^2}{4(n-1)}$, iar prin criteriul cleștelui $\lim_{n\to\infty}I_n=0$.................**3p**

4. Se consideră un grup multiplicativ $(G,\cdot)$ în care $x^3=x$ pentru orice x din G.

Arătați că G este un grup comutativ.

Barem: *xyxyxy=xy* deci *yxyx = 1* iar *yxyxyx = yx* deci *xyxy= 1* **2p**

xyxy = yxyx deci inmulțind cu y^2 la dreapta obținem *xyx=yxyxy* **2p**

de aici înmulțind cu x^2 la dreapta avem *xy = yxyxyx=yx* de unde cerința..................**3p**