
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 19 februarie 2017

Clasa a VIII- a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Fie $S_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Să se arate că $\frac{1}{n+1} < S_n < \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \geq 2$. (4p)

b) Calculați partea întreagă a numărului $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{S_{20}} + \frac{1}{S_{16}} \right)$ (3p)

Gazeta Matematică nr 11/2016

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie ABCD un tetraedru cu $BC = CD$, iar bisectoarele unghiurilor $\angle ACB$, $\angle ACD$ și $\angle BCD$ intersectează laturile (AB), (AD) și (BD) în M, N respectiv P. Arătați că $CP \perp MN$.

SUBIECTUL III (7 puncte)

a) Să se determine perechile de numere întregi x și y care verifică ecuația:

$$x^3 - y^3 = (x - y)^2 \quad (4p)$$

b) Fie a, b, c, d numere reale nenegative cu $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2017$. Să se arate că:

$$\sqrt{2017 - a^2} + \sqrt{2017 - b^2} + \sqrt{2017 - c^2} + \sqrt{2017 - d^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c + d) \quad (3p)$$

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Fie ABCD un pătrat de latura $2a$. Pe planul său, de aceeași parte se ridică perpendicularele AM și CN cu $AM = a$ și $CN = 2a$. Arătați că:

a) $MO \perp (BND)$, unde O este centrul pătratului. (3p)

b) Planele (MBN) și (MDN) sunt perpendiculare. (4p)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore
