

Olimpiada de matematică
faza locală
 21 februarie 2016
 Soluții și bareme
Clasa a XII-a

1. Calculați

$$\int (3x^{10} + 2x^7) \sqrt[3]{x^3 + 1} dx.$$

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} \int (3x^{10} + 2x^7) \sqrt[3]{x^3 + 1} dx &= \int (3x^8 + 2x^5) \sqrt[3]{x^6 (x^3 + 1)} dx \\ &= \int (3x^8 + 2x^5) \sqrt[3]{x^9 + x^6} dx. \end{aligned}$$

..... 3p
 Dacă notăm $x^9 + x^6 = t$, avem $(9x^8 + 6x^5) dx = dt$, sau $(3x^8 + 2x^5) dx = \frac{1}{3} dt$ 2p
 Integrala devine

$$\frac{1}{3} \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{4} t^{\frac{4}{3}} + C,$$

de unde

$$\int (3x^{10} + 2x^7) \sqrt[3]{x^3 + 1} dx = \frac{1}{4} (x^9 + x^6)^{\frac{4}{3}} + C.$$

..... 2p

2. Pe o mulțime M este definită o lege de compoziție asociativă, cu proprietatea

$$(xy)^{2016} = yx,$$

pentru orice x, y . Arătați că legea este comutativă.

Soluție. Punem n în loc de 2016. Avem $(xy)^n = yx$, de unde $((xy)^n)^n = (yx)^n = xy$ 3p

Pe de altă parte, $((xy)^n)^n = ((xy)^{n-1} (xy))^n = (xy) (xy)^{n-1} = (xy)^n = yx$, de unde concluzia 4p

3. Arătați că dacă integrala

$$\int_0^a \cos^3(\pi x + \pi t) dt$$

nu depinde de $x \in \mathbb{R}$, atunci a este un număr întreg par.

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x + t = u$. Obținem

$$\int_0^a \cos^3(\pi x + \pi t) dt = \int_x^{x+a} \cos^3(\pi u) du.$$

..... 2p

Fie $F(u)$ o primitivă a funcției $f(u) = \cos^3(\pi u)$. Atunci

$$\int_x^{x+a} \cos^3(\pi u) du = F(x+a) - F(x).$$

..... 2p

Dacă integrala nu depinde de x , atunci $(F(x+a) - F(x))' = 0$ (derivarea se face după variabila x), de unde

$$\cos^3(\pi x + \pi a) = \cos^3(\pi x),$$

pentru orice x 2p

Pentru $x = 0$, obținem $\cos^3(\pi a) = 1$, deci $\cos(\pi a) = 1$, de unde $\pi a = 2k\pi$, cu k întreg. 1p

4. Fie G un grup finit. Arătați că pentru orice elemente x, y din G are loc

$$\text{ord}(xy) = \text{ord}(yx).$$

Soluție. Deoarece G este finit, orice element are ordin finit. Fie $x, y \in G$ și $n = \text{ord}(xy)$, $m = \text{ord}(yx)$.
Deducem că $(xy)^n = e$, de unde $x(yx)^{n-1}y = e$3p
Dar $x(yx)^{n-1}y = e$ implică $(yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1}$, de unde $(yx)^n = e$, ceea ce implică $\text{ord}(yx) \leq n$,
adică $m \leq n$3p
Similar obținem $n \leq m$, deci $m = n$1p