

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XI-a

BAREM de CORECTARE și NOTARE:

Subiectul 1. a) $A^4 = A^3A = (-BCD)A = B(-CDA) = BB^3 = B^4$ 1p

$C^4 = CC^3 = C(-DAB) = (-CDA)B = B^3B = B^4$ 1p

$D^4 = DD^3 = D(-ABC) = (-DAB)C = C^3C = C^4$ 1p

Finalizare $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$ 1p

b) $A, -A, iA, -iA$ ($i^4=1$) și verificările3p

Subiectul 2. Relația se mai poate scrie : $(n+2)(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 0$ 1p

Notează $y_n = x_{n+1} - x_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{n+2} y_n$ 1p

$y_n = \frac{1}{(n+1)!} y_0$ 1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} (x_1 - x_0)$ 1p

$x_n = x_0 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) (x_1 - x_0)$ 1p

$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $E_n \rightarrow e \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e - 1$ 1p

Finalizare $x_n \rightarrow x_0 + (e - 1)(x_1 - x_0)$ 1p

Subiectul 3. Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = I_3$ 2p

obține $B = \begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}$ 1p

$\det B = 2a(3x^2 - 3ax + a^2)$ 1p

$a \det B = 2a^2(3x^2 - 3ax + a^2)$ 1p

$3x^2 - 3ax + a^2 \geq 0$ ($\Delta = -3a^2 \leq 0$)1p

Finalizare $2a^2(3x^2 - 3ax + a^2) \geq 0$ 1p

Subiectul 4. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$ 1p

$\det(A + A^t) = 4ad - b^2 - 2bc - c^2$ 1p

$A + 2A^t = \begin{pmatrix} 3a & b+2c \\ c+2b & 3d \end{pmatrix}$ 1p

$\det(A + 2A^t) = 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2$ 1p

$\begin{cases} 4ad - b^2 - 2bc - c^2 = 8 \\ 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2 = 27 \end{cases}$ 1p

Finalizare $ad - bc = 11$, deci $\det A = 11$ 2p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.