OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I (7p)

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a\geq -\frac{18}{15}$, $b\geq -\frac{7}{10}$ astfel încât $3a+2b=17$ şi expresia $E(a,b)=3\sqrt{15a+8}+4\sqrt{10b+7}$.

3p) a) Pentru $a=3$ să se demonstreze că $E(a,b)<50$;

4p) b) Să se determine valoarea maximă a expresiei $E(a,b)$, şi valorile numerelor a, b pentru care se atinge acest maxim.

SUBIECTUL II (7p)

Se consideră suma $S_n=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+...+\left[\frac{n}{3}\right]$, $n\in N^*$. Se cere:

2p) a) Calculaţi S_n pentru $n\in\{1,2,3,4,5,6\}$;

5p) b) Să se arate că $S_n=\begin{cases}\frac{n(n-1)}{6}, & n=3m \text{ sau } n=3m+1\\ \frac{(n-2)(n+1)}{6}, & n=3m+2\end{cases}$.

SUBIECTUL III (7p)

Fie ABC un triunghi şi $D\in(BC)$ astfel încât $CD=k\cdot BC,\ k>0$.

4p) a) Demonstraţi că $AD<kAB+(1-k)AC.$

3p) b) Dacă $(AD$ este bisectoarea unghiului A, demonstraţi că $\frac{2}{AD}>\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

SUBIECTUL IV (7p)

Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât $\frac{AM}{MB}=l,\ \frac{CN}{NB}=k,\ \frac{CP}{PD}=m,\ \frac{AQ}{QD}=p,$ unde $l, k, m, p>0$ şi $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele QN, PM şi AC sunt concurente.

<u>NOTĂ:</u> ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.