

Barem clasa a X-a

1. a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(-1)(-2)} + \frac{1}{(-2)(-3)} + \dots + \frac{1}{(-2013)(-2014)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} = 1 - \frac{1}{2014} = \frac{2013}{2014}$ 2p

b) $f(2) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci nu este injectivă2p

c) $f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2(\log_2 x)^2} + \frac{1}{2 \cdot 3(\log_2 x)^2} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014(\log_2 x)^2} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014}\right) \cdot \frac{1}{(\log_2 x)^2} = \frac{2013}{2014} \cdot (\log_2 x)^2$ 2p

Rezultă $\frac{2013}{2014} \cdot (\log_2 x)^2 = \frac{4026}{1007}$, deci $(\log_2 x)^2 = 4$, $\log_2 x = \pm 2$, $x \in \left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$ 1p

2. Avem că $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 3^{\{x\}} \in [1, 3)$. Rezultă că $1 \leq \left(\frac{5}{3}\right)^x < 3$ sau $0 \leq x < \log_{\frac{5}{3}} 3 < 3$.

Se obține că $[x] \in \{0, 1, 2\}$ 2p

Pentru $[x] = 0$ se obține ecuația $5^{\{x\}} = 3^{\{x\} + \{x\}}$ care se scrie $\left(\frac{5}{9}\right)^{\{x\}} = 1$ cu soluția $\{x\} = 0$, deci $x = 0$ 2p

Pentru $[x] = 1$ se obține ecuația $5^{1+\{x\}} = 3^{1+\{x\} + \{x\}}$ care se scrie $\left(\frac{5}{9}\right)^{\{x\}} = \frac{3}{5}$ cu soluția $\{x\} = \log_{\frac{5}{9}} \left(\frac{3}{5}\right) \in [0, 1)$, deci $x = 1 + \log_{\frac{5}{9}} \left(\frac{3}{5}\right)$ 1p

Pentru $[x] = 2$ se obține ecuația $5^{2+\{x\}} = 3^{2+\{x\} + \{x\}}$ care se scrie $\left(\frac{5}{9}\right)^{\{x\}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ cu soluția $\{x\} = \log_{\frac{5}{9}} \left(\frac{3}{5}\right)^2 > 1$, deci nu există soluție1p

Mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \left\{0, 1 + \log_{\frac{5}{9}} \left(\frac{3}{5}\right)\right\}$ 1p

3. a) Putem considera a soluție a primei ecuații.

$(a \cdot b)^{2014} = a^{2014} \cdot b^{2014} = (a^{19})^{106} \cdot (b^{53})^{38} = (-i)^{106} \cdot i^{38} = (-1)(-1) = 1$

b) Dacă z este soluție comună, $z^{19} = -i$, $z^{53} = i$, $(z^{19})^3 = (-i)^3 = i$ 3p

deci $z^{57} = i$ și $z^{53} = i$, rezultă $z^4 = 1$, adică $z \in \{1, -1, i, -i\}$2p

$z = 1, z = -1$ și $z = -i$ nu verifică ambele ecuații, iar i le verifică.

Deci $z = i$ este singura soluție comună.....2p

4. Folosind inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ rezultă $(2^x + 6^x) + (3^{-x} + 4^{-x}) \geq$
 $2\sqrt{2^x \cdot 6^x} + 2\sqrt{3^{-x} \cdot 4^{-x}} = 2(\sqrt{12^x} + \sqrt{12^{-x}}) = 2\left(12^{\frac{x}{2}} + 12^{\frac{-x}{2}}\right) \geq$
 $\geq 2 \cdot 2\sqrt{12^{\frac{x}{2}} \cdot 12^{\frac{-x}{2}}} = 4$ 5p

Egalitatea se realizează pentru $2^x = 6^x, 3^{-x} = 4^{-x}, 12^x = 12^{-x}$, adică pentru $x = 0$ 2p