

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024
Clasa a X-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) (3p) $\sqrt{2^x + 1 - 6\sqrt{2^x - 8}} + \sqrt{2^x + 1 + 6\sqrt{2^x - 8}} = 6.$

b) (4p) $\lg(\sqrt{2x} + \sqrt[5]{x}) = 2 - \log_{2024}(x^2 + 1000).$

2. (7p) Soluțiile ecuației $z^2 - (1+i)z - 4i = 0$ sunt afixele punctelor A și C din planul complex. Determinați afixele punctelor B și D ale pătratului $ABCD$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (2+m)x - m, & x \in (-\infty, 1] \\ x^2 - 2x + m + 3, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

Determinați numărul real m pentru care

a) (4p) funcția f este injectivă, dar nu este surjectivă.

b) (3p) funcția f este surjectivă, dar nu este injectivă.

4. a) (3p) Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi.

Demonstrați că $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) (4p) Se consideră $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1.

Demonstrați că $\lg\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}\right) \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Țimp efectiv de lucru: 3 ore.