

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-a
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

- a) Calculează $M^2, M^3, \dots, M^{2013}$ 1p
 Determină matricea $I_3 + M + M^2 + \dots + M^{2013}$ 1p
 Calculează determinantul $|I_3 + M + M^2 + \dots + M^{2013}| = \frac{(a^{2014} - 1)^3}{(a^2 - 1)^2} (a - 1)$ 1p

- b) Scrie $A_{(a,b)} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aB + bI_3$ 1p

Calculează $B^2 = 2B$, $B^3 = 2^2 B$, și demonstrează că $B^n = 2^{n-1} B$ 1p

Calculează $A_{(a,b)}^n = (aB + bI_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} B^{n-k} b^k I_3 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} 2^{n-k-1} b^k B + b^n I_3 =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (2a)^{n-k} b^k B + b^n I_3 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (2a)^{n-k} b^k B - b^n B \right) + b^n I_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{(2a+b)^n - b^n}{2} \right) B + b^n I_3$$

$$\text{sau } A_{(a,b)}^n = \begin{pmatrix} \frac{(2a+b)^n + b^n}{2} & 0 & \frac{(2a+b)^n - b^n}{2} \\ 0 & b^n & 0 \\ \frac{(2a+b)^n - b^n}{2} & 0 & \frac{(2a+b)^n + b^n}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 2:

- a) În determinantul matricei $A = (a_{ij})_{i,j=1,3}$ se scade din linia 2 linia 1 și din linia 3 linia 1

și se obține $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$; $d_{ij} = a_{ij} - a_{1j} \in \{-2; 0; 2\}; i = 2, 3; j = 1, 2, 3$ 2p

Deoarece d_{ij} se divide cu 2, notăm $d_{ij} = 2k_{ij}$; $k_{ij} \in \{-1; 0; 1\}; i = 2, 3; j = 1, 2, 3$ și obținem

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2k_{21} & 2k_{22} & 2k_{23} \\ 2k_{31} & 2k_{32} & 2k_{33} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \text{ deci } 4 | \det A \dots\dots\dots 2p$$

- b) Cu inegalitatea modulului obține că $|\det(A)| \leq 6$ 1p

$4 | \det A$, deci $D \subseteq \{-4, 0, +4\}$ 1p

Arată că există câte o matrice $A \in M$ pentru fiecare dintre valorile $-4, 0, 4$ posibile ale determinantului, astfel că $D = \{-4, 0, +4\}$ 1p

Subiectul 3:

Consideră şirul $(b_n)_{n \geq 0}, b_n = \frac{1}{2}(a_n + 1)$ 1p

Arată că $b_{n+1} = b_n^2$ şi $b_n \in [0,1], \forall n \geq 0$2p

Dacă $a = -1$, atunci $b_n = 0, \forall n \geq 0$ şi $a_n = -1, \forall n \geq 0$1p

Dacă $a = 1$, atunci $b_n = 1, \forall n \geq 0$ şi $a_n = 1, \forall n \geq 0$1p

Dacă $a \in (-1,1)$, atunci $b_n \in (0,1), \forall n \geq 0$ şi $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.....1p

Trecând la limită, deduce că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ şi atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$1p

Subiectul 4:

a) Arată că $0 < x_n \leq 3, \forall n \geq 1$2p

Deduce că $0 < x_n \leq \frac{4n+1}{n^2}, \forall n \geq 1$1p

Obţine că şirul este convergent, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 1p

b) Rescrie relaţia de recurenţă sub forma $(n+1)x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ 1p

Deduce că $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$ 2p