

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a V-a

SUBIECTE:

1. Se consideră numerele naturale x, z, y astfel încât $9 \cdot x - 5 = 13 \cdot y + 4 \cdot z$.

Determinați restul împărțirii sumei $x + z$ la 13 și restul împărțirii sumei $z + y$ la 9.

2. Scrieți numărul $S = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 100 \cdot 101) - 5050$ ca sumă de pătrate de numere naturale.

3. Determinați valorile naturale ale lui n și cifra nenulă x pentru care are loc relația:

$$3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxxx}$$

4. Se consideră mulțimea $A = \{x^3 + y^3 \mid x, y \in \mathbb{N}^*, x \neq y\}$

a) Verificați dacă $28^{28} \in A$ și $1792^{1792} \in A$.

b) Demonstrați că A conține o infinitate de elemente de forma n^n cu n număr natural nenul.

GM1/2012

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 2 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a V-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1.Rezolvarea subiectului	7p
2.	
$S = 1 \cdot (1 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) + 3 \cdot (3 + 1) + \dots + 100 \cdot (100 + 1) - 5050$	 2p
$S = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \dots + 100^2 + 100 - 5050$	 1p
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 100) - 5050$	 1p
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) + 5050 - 5050$	 2p
$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$	 1p
3. $3^n (3^6 + 3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 4) = 1111x$	 1p
$3^n \cdot 1111 = 1111x$	 1p
$3^n = x$, x cifră	 2p
Avem următoarele posibilități:	
$x = 1$, $n = 0$	 1p
$x = 3$, $n = 1$	 1p
$x = 9$, $n = 2$	 1p
4. a) $28^{28} = 28^{27} \cdot 28 = 28^{27} \cdot (27 + 1) = 28^{27} \cdot (3^3 + 1)$	 1p
$28^{28} = (28^9 \cdot 3)^3 + (28^9 \cdot 1)^3 \Rightarrow 28^{28} \in A$	 1p
$1792^{1792} = 1792^{1791} \cdot 1792 = 1792^{1791} \cdot (12^3 + 4^3)$	 1p
$1792^{1792} = (1792^{597} \cdot 12)^3 + (1792^{597} \cdot 4)^3 \Rightarrow 1792^{1792} \in A$	 1p
b) Considerăm	
$n = M_3^3 + 1 = (3k)^3 + 1$	 1p
Vom avea:	
$n^n = [(3k)^3 + 1]^{(3k)^3} \cdot [(3k)^3 + 1]$	
$n^n = \{[(3k)^3 + 1]^{9k^3} \cdot 3k\}^3 + \{[(3k)^3 + 1]^{9k^3}\}^3$	 1p
Cum k este număr natural, deducem că există o infinitate de numere $n^n \in A$.	 1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.