



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța 21.02.2016

**Clasa a XII-a**

### SUBIECTUL 1

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ .

- a) Calculați  $\int e^x f(x) dx$ .
- b) Determinați primitiva  $F$  a lui  $f$  cu  $F(0) = 1$ .
- c) Calculați  $\int (f(x) + f(-x)) dx$ .

GMB

### SUBIECTUL 2

Fie  $(G, \circ)$  și  $(G, *)$  două grupuri definite pe aceeași mulțime  $G$ , care au același element neutru și care verifică  $x * y = (x \circ x) \circ (x \circ y)$ ,  $(\forall) x, y \in G$ . Să se arate că cele două legi de compoziție coincid și că grupul definit este comutativ.

\*\*\*

### SUBIECTUL 3

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $f: G \rightarrow G$  o funcție cu proprietatea:  $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$ ,  $\forall x, y \in G$ .

- a) Arătați că  $f$  este bijectivă și că  $f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x)$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- b) Dați un exemplu de funcție  $f$  care verifică proprietatea din enunț.

prof. Nelu Chichirim

### SUBIECTUL 4

Să se arate că  $\int_1^n [\log_2 x] dx = n[\log_2 n] - 2^{[\log_2 n] + 1} + 2$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

prof. Constantin Caragea

#### Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu