

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A VI-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Arătați că nu există numere naturale p și q astfel încât să fie adevărată relația $p^2 - 2018 = 2^q$.

Gazeta Matematică

Soluție:

Pentru $q = 0$ obținem $p^2 = 2019$ (fals).....1p

Pentru $q = 1$ obținem $p^2 = 2020$ (fals).....1p

Pentru $q \geq 2 \Rightarrow 2^q + 2018 \div 2$ și $2^q + 2018 \not\div 4 \Rightarrow 2^q + 2018$ nu este pătrat perfect.....5p

2. Se consideră unghiurile adiacente suplementare $\angle AOB$ și $\angle BOC$. Dacă $[OP]$ este bisectoarea $\angle BOC$, $[OQ]$ semidreapta opusă semidreptei $[OP]$ și $m(\angle QOC) = 132^\circ$, determinați măsura unghiului format de bisectoarele $\angle AOP$ și $\angle BOQ$.

Auxiliar Matematică, clasa a VI-a

Soluție:

Obținem $m(\angle AOP) = 132^\circ$ 2p

$m(\angle BOQ) = 132^\circ$ 2p

Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\angle AOP$ și $\angle BOQ$ este egal cu 48° ..3p

3. Determinați numerele prime a, b, c știind că:

$$\frac{2b+2c+2}{30-2c-a} = \frac{2a+b}{b+c-1} = \frac{c+27}{3a+2b+4c}.$$

Soluție:

$$\frac{2b+2c+2}{30-2c-a} = \frac{2a+b}{b+c-1} = \frac{c+27}{3a+2b+4c} = \frac{2a+3b+3c+29}{2a+3b+3c+29} = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{2b+2c+2}{30-2c-a} = 1 \Rightarrow a+2b+4c = 28 \Rightarrow a = 2 \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{2a+b}{b+c-1} = 1 \Rightarrow c = 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{c+27}{3a+2b+4c} = 1 \Rightarrow b = 3 \dots\dots\dots 1p$$

4. Se consideră mulțimile $M_1 = \{1\}, M_2 = \{1, 3\}, M_3 = \{1, 3, 6\}, M_4 = \{1, 3, 6, 10\}, \dots$

a) Arătați că există k și p numere naturale astfel încât $2080 \in M_k \setminus M_p$;

b) Există t număr natural astfel încât $2005 \in M_t$?

c) Determinați numărul elementelor din M_{2005} care sunt divizibile cu 5.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

Elementele mulțimilor sunt de forma $\frac{1 \cdot 2}{2}; \frac{2 \cdot 3}{2}; \dots; \frac{n \cdot (n+1)}{2} \dots\dots\dots 1p$

a) $2080 = \frac{64 \cdot 65}{2}$ de aici avem că $2080 \in M_{64} \setminus M_{63} \dots\dots\dots 1p$

b) $\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016, \frac{62 \cdot 63}{2} = 1953 \Rightarrow$ nu există t natural astfel încât $2005 \in M_t \dots\dots\dots 2p$

c) Numerele care se împart exact la 5 din M_{2005} sunt de forma $\frac{5k(5k-1)}{2}$ sau $\frac{5k(5k+1)}{2}$ și

primele două numere sunt $\frac{4 \cdot 5}{2}, \frac{5 \cdot 6}{2}$ iar ultimele două numere sunt $\frac{2004 \cdot 2005}{2},$

$\frac{2005 \cdot 2006}{2}$; în concluzie sunt 802 numere care se împart exact la 5. $\dots\dots\dots 3p$