Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureş

Clasa a XI –a

1. Fie $A,B \in M_2(R)$ astfel încât $A+B = A\cdot B$.

a) Să se arate că pentru $k \in N, k \geq 2$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $A+B+B^2+\ldots+B^k = O_2$;

ii) $B^{k+1} = O_2$.

b) Dacă A este inversabilă să se arate că $A^{-1}+B^{-1} = I_2$.

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, n \geq 1.$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \ldots x_n$.

3. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = tg\alpha$ şi

$a_{n+1} = a_n^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$.

4. a) Determinaţi matricea $X \in M_2(R)$ astfel încât $X^2 - 2\cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

prof. Gherasin Gheorghe, Liceul Regele Ferdinand

b)Fie $M = \left\{ X \in M_2(C) / \; X = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, x, y, z \neq 0 \right\}$. Determinaţi $H \subset M$, cu trei elemente, pentru care avem $X\cdot Y \in H, \forall X, Y \in H$.

prof. Giurgi Vasile, C.N. Dragoş Vodă

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de: prof. Gherasin Gheorghe, Liceul Regele Ferdinand Sighetu Marmaţiei

prof. Giurgi Vasile, C.N. Dragoş Vodă Sighetu Marmaţiei