



Timp efectiv de lucru : 3 ore

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a XI- a

Problema 1

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 1, a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^3 + a_{n-1}^2}, \forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$

Problema 2

a). Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \cos(n^2 + 2023)}{n + \sin(n^3 + 2022)} = 1$.

b). Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x-5} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt[3]{3-x}}$.

Problema 3

Se consideră matricele $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = (A - I_2)^{31} \text{ și } E = (A + I_2)^{21}.$$

Dacă $\det(A^{31} - 3A + B) = 0, \det(A^{21} - 2A + C) = 0, \det D = 0$ și $\det E = 0$, atunci să se calculeze suma pătratelor elementelor matricei A .

Problema 4

Se consideră matricele $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ și $B = A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + c_n + d_n)$.

Notă : Fiecare problemă se punctează de la 0 puncte la 7 puncte

Timp efectiv de lucru : 3 ore