OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
Botoşani, 16.02.2013

Clasa a VII-a
Barem de notare

Subiectul 1.

a) $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n-1)(n+1) < n^2 \Leftrightarrow n^2 - 1 < n^2$ adevărat………………………..………..2p

b) $\hat{I}n\ inegalitatea\ de\ la\ a)\ d\breve{a}m\ lui\ n\ valorile\ 2,4,6,\dots,2012\ şi\ obţinem$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2011}{2012} < \frac{2012}{2013}$……………………………………………………...1p

$Prin\ \hat{\imath}nmulţirea\ membru\ cu\ membru\ a\ inegalit\breve{a}ţilor\ \Rightarrow\ x < y$……………………1p

c) $x < z \Rightarrow x^2 < xy = \frac{1}{2013} < \frac{1}{2000} = 0{,}0005$..2p

x^2 are partea întreagă şi primele trei zecimale nule, deci x are prima zecimală egală cu 0…1p

Subiectul 2.

a) $\sqrt{n} = \frac{p}{q}, p, q \in N^*, (p,q) = 1 \Rightarrow n = \frac{p^2}{q^2} \in N \Rightarrow q^2/p^2 \Rightarrow q/p$……………………………1p

$(p,q) = 1\ şi\ q/p \Rightarrow q = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = p \in N$……………………………………...………1p

b) Prin reducere la absurd presupunem că $\sqrt{n^2+1} \in Q \Rightarrow \sqrt{n^2+1} = p \in N \Rightarrow p^2 - n^2 = 1 \Rightarrow (p-n)(p+n) = 1$ ………………………………………………………………..…1p

Prin urmare $p - n = p + n = 1 \Rightarrow n = 0\ contradicţie\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+1} \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q}$ ………………..1p

c) Există o infinitate de numere pitagoreice $m, n, p \in N, m = a^2 - b^2, n = 2ab, p = a^2 + b^2, a, b \in N, a > b$ astfel încât $m^2 + n^2 = p^2$……………………………………….….1p

Alegem $r = \frac{1}{k}\left(\frac{m^2}{n^2} - 2012\right) \in Q \Rightarrow \sqrt{kr + 2012} = \frac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{şi}\ \sqrt{kr + 2013} = \frac{p}{n} \in \boldsymbol{Q}$ …….…2p

Subiectul 3.

a) MN este linie mijlocie în △DAC deci MN ∥ TP..1p

MP ∩ NT=$\{B\}$ deci MP∦NT 0,5p

BM=BN ……………………………………………………………………………0,5p

Din Teorema lui Thales în △BMN obţinem PM = TN deci MNTP trapez isoscel…......1p

b) P este centrul de greutate al △ABD şi G este centrul de greutate al △DAC……………..1p

În △OAD din reciproca Teoremei lui Thales, PG∥AD…………………………………...2p

Dar PG⊥AB deci AD⊥AB şi ABCD este pătrat…………………………………………1p

Subiectul 4.

a) $< ABC$ este exterior △ABH şi din teorema unghiului exterior avem $< EAB \equiv BHA$.

Deci △BHA este isoscel………………………………………………………………………1p

$< ACB \equiv AHB$ deci △AHC este isoscel……………………………………………………0,5p

b) BE înălţime în △BHA isoscel ⇒E mijlocul lui AH……………………………… 0,5p

AD înălţime în △AHC isoscel ⇒ D mijlocul lui HC……………………………......0,5p

ED linie mijlocie în △AHC deci ED∥MC………………………………………… 0,5p

$< EDB \equiv < ACB$(corespondente)$\equiv < EAB$. Fie AB∩ED=$\{S\}$. Din △SBD şi △SEA obţinem $< ABD \equiv < AED$. ……………………………………………………………1,5p

(EM este bisectoarea $< AED$ deci $< MED \equiv < EDB$ şi astfel EM∥DC……………......1p

Prin urmare MCDE este paralelogram………………………………………………..0,5p

c) $P_{MCDE} = P_{ABC}$…………………………………………………………………..1p