



Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 29 februarie 2020
Clasa a VIII - a

Barem de corectare și notare

1. a) Determinați numerele reale a, b, c pentru care $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 5 = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$.

S.G.M. 12/2019

b) Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20 = 4x + 12y + 24z$, arătați că $x \in [-1; 5], y \in [0; 3]$ și $z \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

G.M. 12/2019

Soluție:

a) $a^2 - 2a\sqrt{2} + b^2 - 2b\sqrt{3} + c^2 - 2c\sqrt{5} + 10 = 0$ 1 punct

Restrângem pătratele perfecte și obținem:

$(a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 + (c - \sqrt{5})^2 = 0$ 1 punct

Finalizare: $a = \sqrt{2}; b = \sqrt{3}; c = \sqrt{5}$ 1 punct

b) $(x - 2)^2 + (2y - 3)^2 + (3z - 4)^2 = 9$ 1 punct

$|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-1; 5]$ 1 punct

$|2y - 3| \leq 3 \Leftrightarrow y \in [0; 3]$ 1 punct

$|3z - 4| \leq 3 \Leftrightarrow z \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$ 1 punct

2. Arătați că $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, știind că x și y sunt numere reale strict mai mari decât zero.

Soluție: Amplificăm și obținem $\frac{x^3 + y^3}{xy} \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ 1 punct

$(x^3 + y^3)^2 \geq 2x^2y^2(x^2 + y^2)$ 1 punct

$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 \geq 2x^4y^2 + 2x^2y^4 - 4x^3y^3$ 1 punct

$(x^3 - y^3)^2 \geq 2x^2y^2(x^2 - 2xy + y^2)$ 1 punct

$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2)^2 \geq 2x^2y^2(x - y)^2$ 1 punct

$(x - y)^2(x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3) \geq 0$ 1 punct

În a doua paranteză avem sumă de termeni pozitivi, deci este mai mare decât 0, iar $(x - y)^2 \geq 0$. Egalitatea are loc dacă $x = y$ 1 punct



3. Pe planul dreptunghiului $MNPQ$ se ridică de aceeași parte a planului, perpendicularele $MA=12\text{cm}$ și $NB=6\text{cm}$. Știind că $MN=6\sqrt{2}\text{cm}$, $NP=6\sqrt{3}\text{cm}$ și că dreapta AB intersectează planul (MNP) în punctul T , aflați:

a) distanța de la punctul B la dreapta AP ;

b) distanța de la punctul N la planul (BTP) .

Soluție:

a) $BP=12\text{cm}$ 1 punct

$MP=6\sqrt{5}\text{cm}$, $AP=18\text{cm}$ 1 punct

$A_{ABP}=18\sqrt{11}\text{cm}^2$ 1 punct

Fie $BS \perp AP$. $BS=2\sqrt{11}\text{cm}$ 1 punct

b) Construim $NC \perp PT$ și $ND \perp BC$.

$ND \perp (BTP)$ 1 punct

$ND=\frac{6\sqrt{66}}{11}\text{cm}$ 2 puncte

4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub de muchie a , O și O' centrele fețelor $ABCD$ și respectiv, $A'B'C'D'$. Calculați:

a) distanța dintre planele $(O'AD)$ și $(OB'C')$;

b) tangenta unghiului format de planele $(OB'C')$ și (ABC) .

Soluție:

a) Se arată că planele $(O'AD)$ și $(OB'C')$ sunt paralele1 punct

Construim $OM \perp AD$ (M este mijlocul lui AD). Avem $O'M \perp AD$.

În triunghiul dreptunghic $O'OM$, construim $OE \perp O'M$ și conform reciprocei a 2-a a teoremei

celor trei perpendiculare, $OE \perp (O'AD)$ 1 punct

$OO'=a$, $OM=\frac{a}{2}$

Calculăm $O'M=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ 1 punct

Distanța dintre cele două plane este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul $O'OM$

. Deci, $OE=\frac{O'O \cdot OM}{O'M}$; $OE=\frac{a\sqrt{5}}{5}$ 1 punct

b) Prin punctul O construim $PQ \parallel BC$; $P \in (AB)$, $Q \in (CD)$.

$(B'OC') \cap (ABC) = PQ$ 1 punct

Triunghiul $B'OC'$ este isoscel și fie $OR \perp B'C'$, $R \in (B'C')$ și $OS \perp BC$, $S \in (BC)$.

Unghiul format de cele două plane este ROS 1 punct



$$\operatorname{tg} \angle ROS = \frac{RS}{OS} = 2$$

..... 1 punct