

VII

Olimpiada Națională de Matematică

Etaa locală, 26 februarie 2017

Clasa a VII – a

VARIANTA 1

Barem orientativ de corectare și notare:

1. a) Avem $\overline{a,b(cd)} = \frac{990 \cdot a + 99 \cdot b + 10 \cdot c + d}{990}$ 1p

Numărul A devine $A = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10 \cdot (a+b+c+d)}$ 2p

Deoarece a, b, c, d sunt cifre nenule și diferite $\Rightarrow \min(a+b+c+d) = 1+2+3+4 = 10$,

$$\max(a+b+c+d) = 6+7+8+9 = 30 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10 \cdot 10} \leq A \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10 \cdot 30} \Leftrightarrow \frac{10}{3} \leq A \leq \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 0,3 \cdot A \leq \sqrt{3}$$
1p

b) $A \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10 \cdot (a+b+c+d)} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a+b+c+d = 10 \cdot k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ 1p

Dacă $k = 2 \Rightarrow a+b+c+d = 40$, dar $\max(a+b+c+d) = 6+7+8+9 = 30$, rămâne să avem doar $k = 1$, deci $a+b+c+d = 10 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ și variantele.....1p

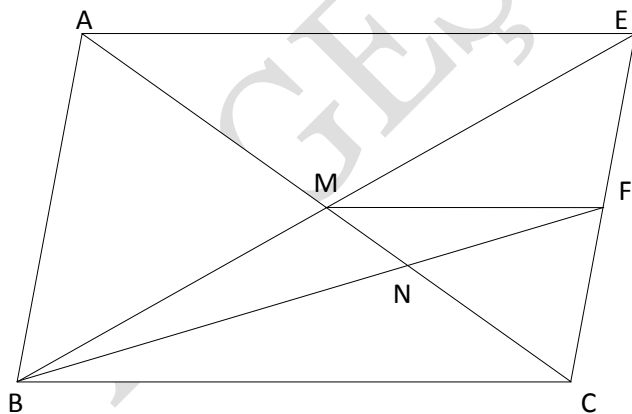
Numerele $\overline{abcd}$ care au prima cifră 1 sunt 123, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, la fel se procedează pentru prima cifra 2, 3, 4.

Obținem în total $4 \cdot 6 = 24$ numere.....1p

2. a) Avem $\triangle ABM \equiv \triangle CEM \Rightarrow [BM] = [EM]$ 2p

Cum $[AM] = [MC] \Rightarrow AECB$ este paralelogram.....1p

b) Cum $\triangle MNF \sim \triangle CNB \Rightarrow \frac{MF}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_{\triangle MNF} = \frac{1}{4} \cdot A_{\triangle BNC}$ 2p



Cum N este centrul de greutate al triunghiului

$$EBC \Rightarrow A_{\triangle BNC} = \frac{2}{3} \cdot A_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle EBC} = \frac{1}{6} \cdot A_{\triangle AECB} \Rightarrow \frac{A_{\triangle MNF}}{A_{\triangle AECB}} = \frac{1}{24}$$
2p

3. Avem $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{99}{100}$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{99^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} = \frac{98}{99}$$

.....

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 5p$$

Prin însumare obținem $A < B$ 2p

4. Cum E este mijlocul lui (AD) și F mijlocul lui

$(DC) \Rightarrow \triangle BAE \equiv \triangle ADF \Rightarrow BE \perp AF$ 2p

Vom arăta că $OQ \parallel MB$. Cum O este mijlocul lui (BD) , vom arăta că Q este mijlocul lui (MD) . Fie $\{H\} = AN \cap BD$. Cum $BD \perp NP$ și $NA \perp BP \Rightarrow H$ este ortocentrul triunghiului $\triangle PBN \Rightarrow PH \perp BN$ și cum $QF \perp BN \Rightarrow PH \parallel QF$ 1p

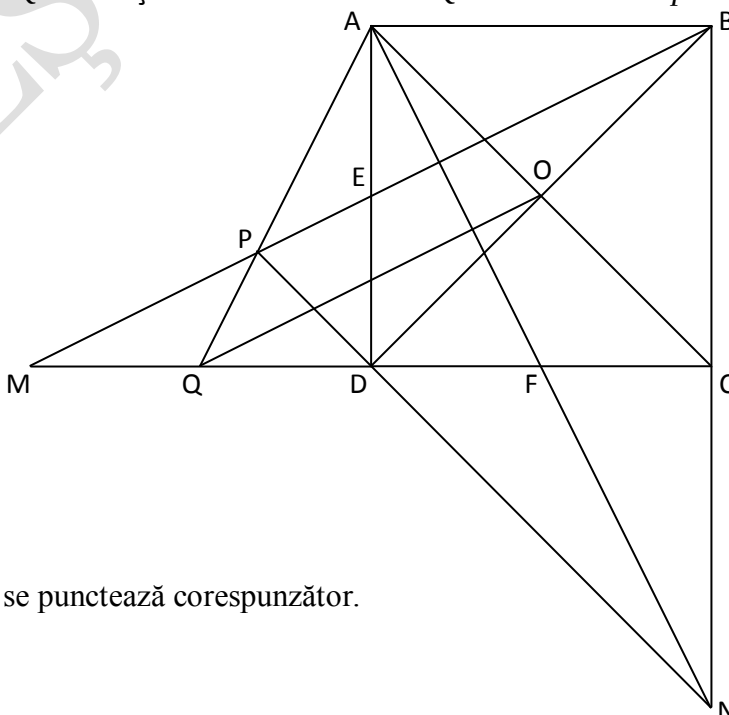
$$\text{Avem } \triangle DHF \sim \triangle BHA \xRightarrow{T.F.A} \frac{HF}{HA} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{În } \triangle AQF, PH \parallel QF \xRightarrow{T.Th} \frac{HF}{QP} = \frac{QP}{PA} \quad (2). \text{ Din (1) și (2) } \Rightarrow \frac{QP}{PA} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\text{În } \triangle QAC, PD \parallel AC \xRightarrow{T.Th} \frac{QP}{PA} = \frac{QD}{DC} \quad (4) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din (3) și (4) } \Rightarrow \frac{QD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2 \cdot QD \text{ și cum } MD = DC \Rightarrow 2 \cdot QD = MD \text{ și cum}$$

$MD = MQ + QD \Rightarrow QD = MQ \Rightarrow Q$ este mijlocul lui (MD) și cum O este mijlocul lui $(BD) \Rightarrow OQ$ este linie mijlocie în $\triangle DMB \Rightarrow OQ \parallel BM$ și cum $BM \perp AN \Rightarrow OQ \perp AN$ 2p



Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.