OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-VRANCEA
08.02.2020
CLASA A IX-A
Bareme de corectare şi de notare

1. Folosind proprietăţile modulului avem:

$\big||x-1|-1\big|-1 \in \{\pm 2020\}$..2p

$|x-1|-1 \in \{\pm 2021\}$..2p

$x-1 \in \{\pm 2022\}$..2p

$S=\{-2021; 2023\}$..1p

2. Pe de o parte, avem $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}\leq\frac{2n+1}{n+1}<2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$

deoarece sunt $2n+1$ fracţii mai mici sau egale cu $\frac{1}{n+1}$ 2p

Pe de altă parte, utilizând metoda inducţiei matematice, avem

$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$..4p

Din $1<x_n<2$, obtinem $[x_n]=1$ 1p

3. Fie $DN\cap AB=\{Q\}$. Din $\Delta NBQ\sim\Delta DAQ$, obtinem $\frac{BQ}{AQ}=\frac{1}{4}$ 1p

Din teorema lui Menelaus în triunghiul MBC , cu transversala $P-N-Q$,

obţinem $\frac{MP}{PC}=\frac{1}{2}$ 2p

Avem $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$

Din $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, obţinem $\overrightarrow{AP}=\frac{8}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

de unde $\alpha=\frac{8}{9}$, $\beta=\frac{1}{3}$ 4p

4. Notăm $a=BC, b=AC, c=AB$.

Avem $D\in(BC)$, $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ 1p

$E\in(AC)$, $\frac{EA}{EC}=\frac{c\cos A}{a\cos C}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{a\cos C}{b}\overrightarrow{BA}+\frac{c\cos A}{b}\overrightarrow{BC}$ 1p

$F\in(AB)$, $\frac{FA}{FB}=\frac{b\cos A}{a\cos B}\Rightarrow\overrightarrow{CF}=\frac{a\cos B}{c}\overrightarrow{CA}+\frac{b\cos A}{c}\overrightarrow{CB}$ 1p

Înlocuind în $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$,

obţinem $\left(\frac{b\cos A}{c}-\frac{c}{b+c}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c\cos A}{b}-\frac{b}{b+c}\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ şi cum vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt

necoliniari, rezultă că $\frac{b\cos A}{c}=\frac{c}{b+c}$ (1) şi $\frac{c\cos A}{b}=\frac{b}{b+c}$ (2)……………..……..…..... 3p

Din (1) şi (2) $\Rightarrow b=c$, $\cos A=\frac{1}{2}$ şi de aici ABC triunghi echilateral.......................1p