Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2014
Clasa a VII-a

Varianta 2

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. a) SOLUŢIE

a) Folosim inegaliatea mediilor $m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ 1p

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x(y+z+t)} \leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \\ \sqrt{y(z+t+x)} \leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \\ \sqrt{z(t+x+y)} \leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \\ \sqrt{t(x+y+z)} \leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \end{array}\right\}$$ 2p

Însumând cele 4 relaţii obţinem inegalitatea cerută. 1p

b)
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{17} < \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{17} < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} \\ \frac{1}{17} < \frac{1}{10} < \frac{1}{8} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{17} = \frac{1}{17} < \frac{1}{8} \end{array}\right\}$$ 2p

Însumând cele 10 relaţii de mai sus obţinem:

$\frac{10}{17} < \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{17} < \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ 1p

2. SOLUŢIE

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{255} - \frac{1}{302}$ 1p

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{302} = \frac{75}{151}$ 2p

$b = (1 \cdot 2 - 1^2) + (2 \cdot 3 - 2^2) + (3 \cdot 4 - 3^2) + \ldots + (2013 \cdot 2014 - 2013^2)$ 1p

$b = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2013 = 1007 \cdot 2013$ 2p

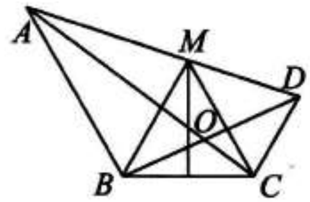
x este număr iraţional 1p

3. SOLUŢIE

Dacă M aparţine mediatoarei lui [BC] şi m(∢BMC) = 60^0, atunci AMBC este echilateral. 1p

MB || CD şi CM || AB implică m(∢ABM) = m(∢BMC) = m(∢DCM) = 60^0 (alt. int.) 1p

dar şi m(∢AMB) = m(∢MDC) (unghiuri corespondente).



De aici ΔAMB ~ ΔMDC şi atunci $\frac{MB}{CD} = \frac{AB}{CM}$ 1p

Cum MB = MC = BC, obţinem $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BC}$ 1p

Cum m(∢ABC) = m(∢BCD) = 120^0 ⇒ ΔACB ~ ΔBCD 1p

De aici m(∢CAB) = m(∢DBC), dar m(∢CAB) = m(∢MCA) (alt. int.)

⇒ m(∢MCO) = m(∢OBC) 1p

Cum m(∢MCO) + m(∢OCB) = 60^0, avem m(∢OBC) + m(∢OCB) = 60^0

de unde m(∢AOB) = 60^0 ca unghi exterior al triunghiului OBC. 1p

4. SOLUTIE

Desen 1p

Aplicăm Teorema lui Menelaus în triunghiul ABC pentru transversala R-M-T

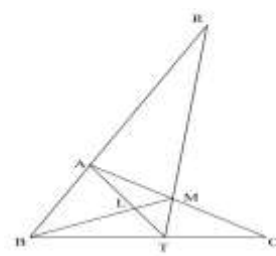
şi obţinem $\frac{CT}{TB} \cdot \frac{BR}{RA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$ 1p

de unde $\frac{CT}{TB} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{CT}{BT} = \frac{2}{3}$ 2p

Aplicăm Teorema lui Menelaus în triunghiul BMC pentru transversala A-L-T

şi obţinem $\frac{BT}{TC} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{ML}{LB} = 1$ 1p

de unde $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{ML}{LB} = 1 \Rightarrow \frac{LM}{LB} = \frac{1}{3}$ 2p



Notă:

Orice altă soluţie se punctează corespunzător.