



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 22 februarie 2019

Clasa a VI-a - Barem de corectare

- 1) a) $a = 2k$, $b = 4k$, $c = 10k$, de unde, $\frac{c-b}{na} = \frac{6k}{2kn} = \frac{3}{n} = \text{nr. prim} \Leftrightarrow n = 1 \dots\dots\dots 3p$
- b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{17}{140} \Leftrightarrow \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{10k} = \frac{17}{140} \Leftrightarrow \frac{17}{20k} = \frac{17}{140} \Leftrightarrow k = 7$
 $a = 14$, $b = 28$, $c = 70 \dots\dots\dots 4p$
- 2) Se notează $[a, b] = m$ și $(a, b) = d$. Relația din problemă devine: $4m + 7d = 124$.
 $(a, b) = d \Rightarrow a = dx$ și $b = dy$, $x, y \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = 1 \dots\dots\dots 2p$
 Pe de altă parte, $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, sau $m \cdot d = a \cdot b \Rightarrow m = d \cdot x \cdot y \dots\dots\dots 2p$
 $d(4xy + 7) = 124 \Rightarrow d$ și $4xy + 7 \in D_{124}$, $4xy + 7$ - nr. impar, diferit de 1 $\dots\dots\dots 2p$
 $4xy + 7 = 31$ și $d = 4$. $(a, b) \in \{(4, 24), (8, 12), (12, 8), (24, 4)\} \dots\dots\dots 1p$
- 3) a) Se notează $m(\sphericalangle AOC) = x \Rightarrow m(\sphericalangle COD) = 5x \dots\dots\dots 1p$
 $\frac{5x}{m(\sphericalangle DOB)} = \frac{5}{3} \Rightarrow m(\sphericalangle DOB) = 3x \dots\dots\dots 1p$
 Se obține $x = 20^\circ$, de unde, $m(\sphericalangle AOC) = 20^\circ$, $m(\sphericalangle COD) = 100^\circ$, $m(\sphericalangle BOD) = 60^\circ \dots\dots\dots 2p$
 b) $m(\sphericalangle AOD) = 120^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EOD) = 60^\circ$, $m(\sphericalangle DOF) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \dots\dots\dots 2p$
 Finalizare $\dots\dots\dots 1p$
- 4) a) Elementele mulțimii M sunt de forma $5k + 1$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 400\} \dots\dots\dots 1p$
 Rezultă că și elementele lui S sunt de forma $5k + 1$ și cum S are 203 elemente, suma lor va fi $5t + 203 \dots\dots\dots 1p$
 $u(5t + 203) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5t + 203$ nu este pătrat perfect $\dots\dots\dots 1p$
 b) Se împarte mulțimea M în 202 submulțimi astfel: $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{6\}$, $M_3 = \{1006\}$,
 iar celelalte 199 submulțimi formate din câte 2 elemente a căror sumă este 2012:
 $M_4 = \{11, 2001\}$, $M_5 = \{16, 1996\}$, ..., $M_{202} = \{1001, 1011\}$
 Considerăm S formată din 1, 6, 1006 și câte un element din submulțimile $M_4, M_5, \dots$
 Cum S conține 203 elemente, de la una din submulțimile de la M_4 la M_{202} se vor lua 2 elemente.
 Prin urmare, există două elemente în S a căror sumă este 2012 $\dots\dots\dots 4p$

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.