Olimpiada de matematică, Faza locală, Braşov, 21 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a IX-a

IX 1. $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$;

.... **1p**

$231 = 400 - 169$ divide $400^n - 169^n$, deci 33 divide $20^{2n} - 13^{2n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

.... **2p**

$13^{2^1} + 13^{2^0} + 1 = 183 = 3 \cdot 61$;

.... **1p**

$13^{2^{n+1}} + 13^{2^n} + 1 = \left(13^{2^n} + 13^{2^{n-1}} + 1\right)\left(13^{2^n} - 13^{2^{n-1}} + 1\right),\ n \in \mathbb{N}^*$;

.... **2p**

demonstraţie prin inducţie: $13^{2^n} + 13^{2^{n-1}} + 1$ este divizibil cu 61, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

.... **1p**

IX 2. I. Demonstraţie bazată pe inegalitatea Cauchy-Schwarz.

a) $\sum \sqrt{a(b+c)} \leq \sqrt{\sum a \sum (b+c)} = (a+b+c)\sqrt{2}$,

.... **2p**

cu egalitate pentru $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, echivalent cu $a = b = c$.

.... **1p**

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{ka_k\left(s_n - ka_k\right)} \leq \sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\left(s_n - ka_k\right)\right)} = s_n\sqrt{n-1}$;

.... **1,5p**

$ka_k < (k+1)a_{k+1},\ 1 \leq k \leq n-1$, deci inegalitatea este strictă;

.... **0,5p**

$s_n = a_1\left[2^n(n-1)+1\right]$ şi finalizare.

.... **2p**

II. Demonstraţie bazată pe inegalitatea mediilor.

a) $\sqrt{a(b+c)} \leq \left[a/2 + (b+c)/4\right]\sqrt{2}$ (**1,5p**); egalitate pentru $2a = b + c$ (**1p**); finalizare (**0,5p**).
b) $\sqrt{ka_k\left(s_n - ka_k\right)} \leq \left[(ka_k)/2 + \left(s_n - ka_k\right)/(2n-2)\right]\sqrt{n-1}$ (**1p**);
$\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{ka_k\left(s_n - ka_k\right)} < s_n\sqrt{n-1}$ (**1p**); $s_n = a_1\left[2^n(n-1)+1\right]$ şi finalizare (**2p**).

IX 3. Dacă $[a]=[b]$ atunci $|a-b|<1$;

.... **2p**

$[x^2-x-2]=[x] \;\Rightarrow\; |x^2-2x-2|<1 \;\Rightarrow\; x\in(-1,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},3)$.

.... **1p**

Cazul I. $x\in(-1,1-\sqrt{2})$. Atunci $[x]=-1$, deci ecuaţia devine $[x^2-x-2]=-1$;

$$\begin{cases} -1\le x^2-x-2<0 \\ x\in(-1,1-\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right) \\ x\in(-1,1-\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \;x\in\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

.... **2p**

Cazul II. $x\in(1+\sqrt{2},3)$. Atunci $[x]=2$, deci ecuaţia devine $[x^2-x-2]=2$;

$$\begin{cases} 2\le x^2-x-2<3 \\ x\in(1+\sqrt{2},3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2},\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \\ x\in(1+\sqrt{2},3) \end{cases} \Leftrightarrow \;x\in\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right).$$

.... **1,5p**

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei: $S=\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

.... **0,5p**

IX 4. Fie $b_n=x_n-x_{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*$.
Şirul $(b_n)_{n\ge1}$ este o progresie geometrică cu raţia $q=2$ şi $b_1=1$, deci $b_k=2^{k-1},\ k\in\mathbb{N}^*$;
$x_0=2^0-1$ şi $x_n=x_0+\sum_{k=1}^n b_k=2^n-1,\ n\in\mathbb{N}^*$.
Alte metode:

- recunoasterea formulei termenului general ($x_n=2^n-1,\ n\in\mathbb{N}^*$) şi demonstrarea formulei prin metoda inducţiei matematice (utilizând o versiune generalizată);
- determinarea formulei termenului general cu ajutorul ecuaţiei caracteristice.

.... **4p**

$\sqrt{x_n^2+2^{n+2}}=2^n+1,\ n\in\mathbb{N}$;
$y_n=\frac{2^n+1}{2^n+3} \;\Rightarrow\; y_n\in(0,1) \;\Rightarrow\; [y_n]=0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

.... **3p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.

Olimpiada de matematică, Faza locală, Braşov, 21 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a X-a

X 1. Sistemul este definit pentru $x, y \geq 0$.

.... **1p**

$\sqrt[4]{x\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{8}}, \ \sqrt[4]{y\sqrt{y}} = y^{\frac{3}{8}};$

.... **1p**

$\sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}}, \ \sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}} = y^{\frac{1}{8}}.$

.... **1p**

Cu substituţiile $a = x^{\frac{1}{8}}$ şi $b = y^{\frac{1}{8}}$, sistemul devine

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 7 \\ a + b = 3 \end{cases}, \ a, b \geq 0;$$

.... **1p**

$a = 3 - b, \ (b-1)(2b^2 - 7b + 20) = 0$; soluţii reale (pozitive): $a = 2, \ b = 1$.

.... **2p**

Soluţia sistemului: $x = 2^8, \ y = 1$.

.... **1p**

X 2. Ecuaţia este definită pentru $x \in (0, \infty)$;

.... **1p**

$x = 10^{lg\, x}$;

.... **1p**

ecuaţia devine $(30 + 10\sqrt{5})^{lg\, x} + 20 = 10(5 + \sqrt{5})^{lg\, x}$.

.... **1p**

$30 + 10\sqrt{5} = (5 + \sqrt{5})^2$.

.... **1p**

Cu substituţia $y = (5 + \sqrt{5})^{lg\, x}$, ecuaţia devine $y^2 - 10y + 20 = 0$, cu soluţiile $y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5}$.

.... **2p**

Soluţiile ecuaţiei date: $x_1 = 10$ şi $x_2 = 10^{\frac{lg(5-\sqrt{5})}{lg(5+\sqrt{5})}}$.

.... **1p**

X 3. $p_1 \geq 2,\ p_2 \geq 3, \cdots, p_n \geq n+1;$

.... **2p**

$1 - \frac{1}{p_k^2} \geq 1 - \frac{1}{(k+1)^2},\ k = 1, 2, \cdots, n;$

.... **1p**

$1 - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k(k+2)}{(k+1)^2};$

.... **1p**

$$\sum_{k=1}^{n} \log_2 \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \log_2 \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \log_2 \frac{n+2}{2(n+1)} > \log_2 \frac{1}{2} = -1.$$

.... **3p**

X 4. Presupunem prin absurd că f este periodică, cu o perioadă $T > 0$: $f(x+T) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

.... **1p**

pentru $x = 0$ obţinem $a \sin T + b \sin(T\sqrt{5}) = 0$.

.... **2p**

$f(x+T) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ 2a \sin \frac{T}{2} \cos \frac{2x+T}{2} + 2b \sin \frac{T\sqrt{5}}{2} \cos \frac{(2x+T)\sqrt{5}}{2} = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$
pentru $x = \frac{\pi - T}{2}$ avem $\cos \frac{2x+T}{2} = 0$ şi $\cos \frac{(2x+T)\sqrt{5}}{2} \neq 0$ (deoarece $\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$); rezultă $\sin \frac{T\sqrt{5}}{2} = 0$.
Obţinem $\sin(T\sqrt{5}) = 0$ şi $\sin T = 0$.

.... **2p**

$\sin(T\sqrt{5}) = 0\ \Rightarrow\ (\exists\ m \in \mathbb{N}^*)\ \left(T\sqrt{5} = m\pi\right)$; $\sin T = 0\ \Rightarrow\ (\exists\ n \in \mathbb{N}^*)\ (T = n\pi)$;
rezultă $\sqrt{5} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$; contradicţie. Deci f nu este periodică.

.... **2p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.

Olimpiada de matematică, Faza locală, Braşov, 21 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a XI-a

XI 1. $\det(X) = 0$

.... **1p**

Notăm $u = \mathrm{tr}(X) \in \mathbb{R}$. $X^2 = uX$ (cf. relaţiei Cayley-Hamilton).

.... **2p**

$X^3 - 4X^2 + 5X = (u^2 - 4u + 5)X$.

.... **1p**

$$X = \frac{1}{u^2 - 4u + 5}\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

.... **1p**

$$u = \frac{10}{u^2 - 4u + 5} + \frac{10}{u^2 - 4u + 5} \Leftrightarrow u^3 - 4u^2 + 5u - 20 = 0 \overset{u\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} u = 4.\ X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

.... **2p**

XI 2. Prin sumarea ecuaţiilor obţinem: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2014} = 2014$.

.... **1p**

Notaţie $x_{2014+k} = x_k,\ k \geq 1$.
Prin sumarea perechilor de ecuaţii consecutive obţinem: $x_k + x_{k+3} = 2,\ k = \overline{1, 2014}$.

.... **2p**

Rezultă $x_k = x_{k+6},\ k = \overline{1, 2014}$.

.... **1p**

$x_1 = x_{2011} = x_3 = x_{2013} = x_5 \ \Rightarrow\ x_{2k-1} = a,\ 1 \leq k \leq 1007$;
$x_2 = x_{2012} = x_4 = x_{2014} = x_6 \ \Rightarrow\ x_{2k} = b,\ 1 \leq k \leq 1007$;
$2a - b = 1,\ 2b - a = 1 \ \Rightarrow\ a = b = 1$.

.... **2p**

Sistemul are soluţia $x_n = 1,\ n = \overline{1, 2014}$.

.... **1p**

Demonstraţie bazată pe rezolvarea recurenţei liniare de ordinul 2.
Substituţie: $y_n = x_n - 1$. Şirul (y_n) verifică $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0,\ 1 \leq n \leq 2012$ (**2p**);
$y_n = a\varepsilon^n + b\overline{\varepsilon}^n,\ \ 1 \leq n \leq 2014$, unde $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0,\ \varepsilon^3 = -1$ (**2p**);

$$\begin{cases} y_1 - y_{2014} + y_{2013} = 0 \\ y_2 - y_1 + y_{2014} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon a + (\overline{\varepsilon} - 1)b = 0 \\ -(1+\varepsilon)a + (1 - \overline{\varepsilon})b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases};\ y_n = 0,\ n = \overline{1, 2014}\ (\mathbf{2p}).$$

Sistemul are soluţia $x_n = 1,\ n = \overline{1, 2014}$ (**1p**).

XI 3. a) Notăm $q = a_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$;

$$a_{n+1} = \frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}} = \frac{\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}}{\frac{x_n+2}{x_n+1}+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})(x_n-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(x_n+\sqrt{2})} = qa_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, este o progresie geometrică cu raţia q şi termenul general $a_n = q^{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

.... **3p**

b) Fie şirul $b_n = \frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}},\ n \in \mathbb{N}$. Avem $b_0 = q$ şi

$$b_{n+1} = \frac{y_{n+1}-\sqrt{2}}{y_{n+1}+\sqrt{2}} = \frac{\frac{y_n^2+2}{2y_n}-\sqrt{2}}{\frac{y_n^2+2}{2y_n}+\sqrt{2}} = \frac{(y_n-\sqrt{2})^2}{(y_n+\sqrt{2})^2} = b_n^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Obţinem $b_n = q^{2^n},\ n \in \mathbb{N}$ (inducţie).

.... **2p**

$$b_n = q^{2^n} = a_{2^n-1} \Rightarrow \frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}} = \frac{x_{2^n-1}-\sqrt{2}}{x_{2^n-1}+\sqrt{2}} \Rightarrow y_n = x_{2^n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

deci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

.... **2p**

Demonstraţie bazată pe rezolvarea recurenţei liniare de ordinul 2
a)

$$x_n = p_n/q_n,\ n \in \mathbb{N};\ \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases},\ n \in \mathbb{N}\ (\mathbf{1p});$$

$p_{n+2} - 2p_{n+1} - p_n = 0,\ n \in \mathbb{N};\ p_0 = 1,\ p_1 = 3.$ (**1p**);
ecuaţia caracteristică $x^2 - 2x - 1 = 0$ are rădăcinile $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$;

$$p_n = [(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}]/2,\ q_n = [(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}]/(2\sqrt{2});$$

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}\sqrt{2},\ n \in \mathbb{N}\ (\mathbf{1p});$$

$$a_n = \frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\ (\mathbf{1p}).$$

b) $y_n = x_k \Rightarrow y_{n+1} = (x_k^2+2)/(2x_k) = x_{2k+1}$ (**2p**); finalizare (**1p**).

XI 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile din enunţ.
$f(0) = 0$ (se consideră $x = y = 0$).

.... **1p**

$f(-y) = f(y),\ \forall\ y \in \mathbb{R}$ (se consideră $x = 0$), deci f este funcţie pară.

.... **1p**

$f(nx) = n^2 f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ (demonstraţie prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$).

.... **2p**

$f\left(\frac{m}{n}\right) = a\left(\frac{m}{n}\right)^2,\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}^*$, unde $a := f(1) \in \mathbb{R}$.

.... **1p**

$f(r) = ar^2,\ \forall\ r \in \mathbb{Q}$ (conform parităţii lui f)

.... **0.5p**

Pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, există un şir $(r_n)_{n\geq 1}$ de numere raţionale astfel ca $r_n \to \lambda$.

$$f(\lambda) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a(r_n)^2 = a\lambda^2 \text{ (conform continuităţii lui } f\text{)}.$$

Deci $f(x) = ax^2,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

.... **1p**

Reciproc, pentru $a \in \mathbb{R}$ arbitrar, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, satisface ipoteza.

.... **0.5p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.

Olimpiada de matematică, Faza locală, Braşov, 21 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a XII-a

XII 1. Fie $A \in \mathcal{M}$, inversabilă, cu $A^{-1} = {}^t A$.
$A \cdot {}^t A = I_2 \Rightarrow \det(A)\det({}^tA) = 1 \Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$.

.... **2p**

Cazul I. $\det(A) = 1$.

$$\begin{cases} {}^tA = A^* \\ \det(A) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-1,1\} \\ b = c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = I_2 \text{ sau } A = -I_2.$$

.... **2p**

Cazul II. $\det(A) = -1$.

$$\begin{cases} {}^tA = -A^* \\ \det(A) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b = c \\ a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sau } A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

.... **1p**

Fie

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$J_2^2 = I_2$.

.... **1p**

$G = \{I_2, -I_2, J_2, -J_2\}$. Stabilirea izomorfismului grupului $(G, \cdot)$ cu grupul lui Klein.

.... **1p**

XII 2. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;

.... **2p**

$\sqrt{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})/\sqrt{2}$;

.... **1p**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right), \ x \in \mathbb{R}.$$

.... **1p**

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) \right] + \mathcal{C}, \ x \in \mathbb{R}.$$

.... **3p**

XII 3. a)

$$\frac{1}{1+x^b} \geq 1 - x^b,\ \forall\, x \in [0,1];$$

.... **2p**

$$\frac{x^a}{1+x^b} \geq x^a - x^{a+b},\ \forall\, x \in [0,1];$$

.... **1p**

$$\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\,dx \geq \int_0^1 x^a\,dx - \int_0^1 x^{a+b}\,dx = \frac{b}{(a+1)(a+b+1)}.$$

.... **1p**

b)

$$d := \int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\,dx - \frac{b}{(a+1)(a+b+1)} = \int_0^1 \left(\frac{x^a}{1+x^b} - x^a + x^{a+b}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^{a+2b}}{1+x^b}\,dx;$$

.... **1p**

Cu schimbarea de variabilă $x^b = y$,

$$d = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{y^{(a+b+1)/b}}{1+y}\,dy.$$

.... **1p**

Funcţia $f(y) = y^{(a+b+1)/b}$ este crescătoare pe $[0,1]$, iar funcţia $g(y) = (1+y)^{-1}$ este descrescătoare pe $[0,1]$. Conform versiunii integrale a inegalităţii sumă a lui Cebîşev,

$$d \leq \frac{1}{b}\int_0^1 f(y)\,dy \cdot \int_0^1 g(y)\,dy = \frac{\ln 2}{a+2b+1}.$$

.... **1p**

XII 4. a) Fie e elementul unitate al grupului G şi $c = xax^{-1}$, cu $x \in G$, un element conjugat cu a.
$c^k = e \ \Leftrightarrow\ xa^kx^{-1} = e \ \Leftrightarrow\ a^k = e$, de unde $\mathrm{ord}(c) = \mathrm{ord}(a) = m$.

.... **3p**

b) Fie $C_a = \{x \in G | ax = xa\}$.
$C_a =< a >= \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$ este un subgrup al grupului G, deci m divide n.

.... **1p**

Notăm $\hat{a} = \{xax^{-1} | x \in G\}$ (clasa elementelor grupului conjugate cu elementul a);
$|\hat{a}| = |\{xC_a | x \in G\}| = \frac{|G|}{|C_a|} = \frac{n}{m}$, deoarece:
$xax^{-1} = yay^{-1} \ \Leftrightarrow\ (y^{-1}x)a = a(y^{-1}x) \ \Leftrightarrow\ y^{-1}x \in C_a \ \Leftrightarrow\ x \in yC_a \ \Leftrightarrow\ xC_a = yC_a$.

.... **2p**

Deci $|\{x \in G | \mathrm{ord}(x) = m\}| \geq |\hat{a}| = \frac{n}{m}$.

.... **1p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.