



Olimpiada Națională de Matematică,

Etapa locală , 24 februarie- 2019- Clasa a XI a

1. Dacă a, b, c sunt numere întregi să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c \\ c & a - \frac{1}{2} & b \\ b & c & a - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ este

inversabilă.

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se arate că:

a) Există o infinitate de matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + I_n = 2A$.

b) Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + I_n = 2A$, atunci $A^{2^k} + I_n = 2A^k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

3. a) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x + 9^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ este număr natural.

b) Există $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$? Justificare.

4. a) Să se arate că dacă $0 < a < b$ atunci $5^a - 3^a < 5^b - 3^b$.

b) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale definit prin $2^{x_{n+1}} = 5^{x_n} - 3^{x_n}, n \geq 1$. Știind că șirul

$(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, să se determine x_{2019} .

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează cu punctaje de la 0 la 7 puncte.