Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Soluţii-Bareme – clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux astfel ca $f(a) \cdot f(b) < 0$. Arătaţi că există α, β astfel ca $a < \alpha < \beta < b$ şi $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

Soluţie.

Conform ipotezei, există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = 0$. .... 1 punct

Presupunem $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$. (Cazul $f(a) > 0$ şi $f(b) < 0$ se tratează analog.)

Fie $m = \min\left\{\frac{1}{2}, f(b)\right\} \in (0, 1/2]$. Conform proprietăţii lui Darboux a funcţiei f, au loc incluziunile: $[f(a), 0] \subset f([a, c])$ şi $[0, m] \subset [0, f(b)] \subset f([c, b])$. .... 2 puncte

Funcţia $g : [0, m] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$, este strict descrescătoare şi continuă, deci are imaginea $g([0, m]) = \left[\frac{m}{m-1}, 0\right] \subset (-\infty, 0]$. .... 2 puncte

Alegem $y \in (f(a), 0) \cap \left(\frac{m}{m-1}, 0\right)$. Atunci există $\alpha \in (a, c)$ astfel ca $f(\alpha) = y$ şi există $x \in (0, m)$ astfel ca $g(x) = y$, deci există $\beta \in (c, b)$ astfel ca $f(\beta) = x$. Rezultă $a < \alpha < \beta < b$ şi $f(\alpha) = \dfrac{f(\beta)}{f(\beta) - 1}$, deci $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$. .... 2 puncte

Problema 2.

Pentru $n \geq 2$ numere reale nenule $a_1, a_2, ..., a_n$, nu neapărat distincte, definim matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ prin $a_{ij} = \max\{a_i, a_j\}, \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Arătaţi că $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{card}\{a_k | \, k = 1, 2, ..., n\}$.

Soluţie.

Pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dacă $a_i = a_j$, atunci linia (coloana) i a matricei A este egală cu linia (coloana) j a matricei A. .... 1 punct

Presupunem că printre numerele reale nenule $a_1, a_2, ..., a_n$ există $r \leq n$ numere distincte $a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_r}$. Rangul unei matrice este egal cu numărul de linii (coloane) liniar independente şi este invariant la permutarea liniilor (coloanelor). Rezultă $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(B)$, unde $B = (a_{k_i k_j})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbb{R})$. .... 3 puncte

Avem

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{k_1k_1} & a_{k_1k_2} & \ldots & a_{k_1k_{r-1}} & a_{k_1k_r} \\ a_{k_2k_1} & a_{k_2k_2} & \ldots & a_{k_2k_{r-1}} & a_{k_2k_r} \\ & & \ldots & & \\ a_{k_{r-1}k_1} & a_{k_{r-1}k_2} & \ldots & a_{k_{r-1}k_{r-1}} & a_{k_{r-1}k_r} \\ a_{k_rk_1} & a_{k_rk_2} & \ldots & a_{k_rk_{r-1}} & a_{k_rk_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \ldots & a_{k_{r-1}} & a_{k_r} \\ a_{k_2} & a_{k_2} & \ldots & a_{k_{r-1}} & a_{k_r} \\ & & \ldots & & \\ a_{k_{r-1}} & a_{k_{r-1}} & \ldots & a_{k_{r-1}} & a_{k_r} \\ a_{k_r} & a_{k_r} & \ldots & a_{k_r} & a_{k_r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{k_1} - a_{k_2} & a_{k_2} - a_{k_3} & \ldots & a_{k_{r-1}} - a_{k_r} & a_{k_r} \\ 0 & a_{k_2} - a_{k_3} & \ldots & a_{k_{r-1}} - a_{k_r} & a_{k_r} \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{k_{r-1}} - a_{k_r} & a_{k_r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k_r} \end{vmatrix} = a_{k_r} \prod_{i=1}^{r-1} \left(a_{k_i} - a_{k_{i+1}}\right) \neq 0.$$

Rezultă $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(B) = r = \mathbf{card}\{a_k | \, k = 1, 2, ..., n\}$. .... 3 puncte

Problema 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de ordinul $n\geq 2$, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \text{ şi } \lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)=0.$$

Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=0$, pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, unde $f^{(k)}$ reprezintă derivata de ordinul k a funcției f.

Soluţie.

Definim funcţiile $g_k:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_k(x)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{k^i}{i!}f^{(i)}(x)$, $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. Fie $x>0$ şi $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. Din formula lui Taylor cu rest Lagrange, există $c_k(x)\in(x,x+k)$ astfel ca $g_k(x)=f(x+k)-f(x)-\dfrac{k^n}{n!}f^{(n)}(c_k(x))$ …... 2 puncte

Avem $\lim\limits_{x\to\infty} c_k(x)=\infty$, $k=1,2,\ldots,n-1$. Atunci, conform ipotezei, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} g_k(x)=0$, pentru oricare $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. …………………... 1 punct

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1\\ 1 & 2^2 & \ldots & (n-1)^2\\ & & \ldots & \\ 1 & 2^{n-1} & \ldots & (n-1)^{n-1}\end{pmatrix}\in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Pentru orice $x>0$, avem $(g_1(x)\ g_2(x)\ \ldots g_{n-1}(x))=\left(\dfrac{f^{(1)}(x)}{1!}\ \dfrac{f^{(2)}(x)}{2!}\ \ldots\ \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right)\cdot A$. ……... 2 puncte

Matricea A este inversabilă deoarece $\det(A)=(n-1)!\prod\limits_{1\leq i<j\leq n-1}(j-i)\neq 0$.

Fie $A^{-1}=(a_{ik})_{1\leq i,k\leq n-1}$. Obţinem $f^{(k)}(x)=k!\sum\limits_{i=1}^{n-1}g_i(x)a_{ik}$, $x>0$, $k=\overline{1,n-1}$.

Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=k!\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_{ik}\lim\limits_{x\to\infty} g_i(x)=0$, $\forall\, k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. ... 2 puncte

Problema 4.

Fie $n\geq 2$ şi matricele $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. Presupunem că există $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$ astfel încât $xAB+(1-x)BA=I_n$. Arătaţi că $(AB-BA)^n=O_n$.

Soluţie.

Fie $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ valorile proprii comune ale matricelor AB şi BA. ... 1 punct

Atunci matricea $(1-x)BA$ are valorile proprii $(1-x)\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,n$, iar matricea I_n-xAB are valorile proprii $1-x\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,n$. ………………... 1 punct

Cum matricele $(1-x)BA$ si I_n-xAB sunt egale, ele au aceleaşi valori proprii, deci

$$(1)\quad \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}(1-x)^k\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_k}=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}(1-x\lambda_{i_1})(1-x\lambda_{i_2})\ldots(1-x\lambda_{i_k}),$$

pentru $k=1,2,\ldots,n$. ……………………………………………... 1 punct

Notăm $S_k=\sum\limits_{1\leq i_1<ldots<i_k\leq n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_k}$, $k=1,2,\ldots,n$. Demonstrăm $S_k=C_n^k$.

Pentru $k=1$, avem $(1-x)\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=n-x\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$, de unde $S_1=n=C_n^1$.

Fie $k\in\{2,\ldots,n\}$. Presupunem $S_i=C_n^i$, $i=1,\ldots,k-1$. Atunci, conform (1),

$(1-x)^kS_k=C_n^k-xC_{n-1}^{k-1}S_1+x^2C_{n-2}^{k-2}S_2+\ldots+(-1)^{k-1}x^{k-1}C_{n-(k-1)}^1S_{k-1}+(-1)^kx^kS_k=$

$=C_n^k-xC_{n-1}^{k-1}C_n^1+x^2C_{n-2}^{k-2}C_n^2+\ldots+(-1)^{k-1}x^{k-1}C_{n-(k-1)}^1C_n^{k-1}+(-1)^kx^kS_k=$

$=C_n^k-xC_n^kC_k^1+x^2C_n^kC_k^2+\ldots+(-1)^{k-1}x^{k-1}C_n^kC_k^{k-1}+(-1)^kx^kS_k=$

$= C_n^k\left[(1-x)^k - (-1)^k x^k\right] + (-1)^k x^k S_k.$
Obţinem $\left[(1-x)^k - (-1)^k x^k\right]\left(S_k - C_n^k\right) = 0$. Avem $(1-x)^k-(-1)^k x^k \neq 0$, deoarece $x \neq \frac{1}{2}$. Atunci $S_k = C_n^k$. Conform principiului al II-lea al inducţiei matematice, rezultă $S_k = C_n^k,\ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. .... 2 puncte
Fie $p_{AB}(x) = \det(xI_n - AB)$ polinomul caracteristic al matricei AB. Avem:

$$p_{AB}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i) = x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n S_n =$$
$$= x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n C_n^n = (x-1)^n.$$

Atunci $(AB - I_n)^n = p_{AB}(AB) = O_n$. Cum $AB - I_n = (1-x)(AB - BA)$ şi $x \neq 1$, obţinem $(AB - BA)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n}(AB - I_n)^n = O_n$. .... 2 puncte