



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a VIII-a

Problema 1.

Aflați numerele naturale x și y care verifică simultan relațiile următoare:

$$4x^2 + 5xy + 2y = 25 \text{ și } y^2 - xy + 4x = 10.$$

Problema 2.

Fie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ un cub de latură a și punctele M și N mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[AA_1]$.

a) Calculați $C_1 S$, unde $\{S\} = MN \cap (A_1 B_1 C_1)$.

b) Determinați distanța de la punctul N la planul $(A_1 C_1 M)$.

Problema 3.

a) Demonstrați că:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \in \mathbf{Z}$$

b) Determinați $x, y, z \in \mathbf{R}$, astfel încât:

$$\sqrt{x^2 - \sqrt{112}x + 37} + \sqrt{y^2 - \sqrt{180}y + 54} + \sqrt{z^2 - \sqrt{704}z + 185} \leq 9$$

Problema 4.

Arătați că, dacă o dreaptă d formează unghiuri congruente cu trei drepte a, b, c concurente coplanare, atunci dreapta d este perpendiculară pe planul determinat de dreptele a, b, c .

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

