CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – Constanța, 16.02.2013
filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii
Clasa a XII-a

Subiectul 1

a) (1p) $A^2 = A$, pentru că $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A$.

b) (2p) $X(a)\cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA^2 =$
$= I_2 + aA + bA + abA = I_2 + (a+b+ab)A = X(a+b+ab)$

c) (4p) Partea stabilă (din punctul anterior şi $a \neq -1,\ b \neq -1$ implică $a+b+ab \neq -1$) (1p).
Element neutru $X(0) = I_2$ (1p), asociativitate şi comutativitate (1p).
Element simetrizabil $(X(a))^{-1} = X\left(-\dfrac{a}{a+1}\right)$ (1p).

Subiectul 2

a) (2p) Cum $x \circ y = 3(x-2)(y-2)+2$, din $x,\ y \in (2, +\infty)$ rezultă că $x \circ y \in (2, +\infty)$.

b) (2p) Se impune condiţia de element neutru şi se obţine $(x-2)(3e-7) = 0$, de unde $e = \dfrac{7}{3}\ \forall x \in \mathbf{R}$.

c) (3p) Pentru verificarea condiţiei de morfism $f(x \circ y) = f(x)\cdot f(y)$ (1p).
Pentru verificarea condiţiei de injectivitate (1p).Pentru verificarea condiţiei de surjectivitate (1p).

Subiectul 3

a) (2p) $\int f(x)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2x}dx = \int \dfrac{4x^2+16x+4}{\sqrt{x^2+16}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2x}dx = \int\left(2x+8+\dfrac{2}{x}\right)dx = x^2+8x+2\ln x + C$.

b) (2p) Orice primitivă a funcţiei *f* este crescătoare pe $\mathbf{R}$ dacă şi numai dacă $F'(x) = f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$ (1p).Deducerea valorilor lui $a \in [-8, 8]$ (1p).

c) (3p) $\int f(x)dx = (mx+n)\sqrt{x^2+16} + n\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx$ dacă şi numai dacă funcţia $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$G(x) = (mx+n)\sqrt{x^2+16}$ este primitivă pentru funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{4x^2+ax+4-n}{\sqrt{x^2+16}}$, de unde

$G'(x) = g(x)$ (1p)

$\dfrac{2mx^2+nx+16m}{\sqrt{x^2+16}} = \dfrac{4x^2+ax+4-n}{\sqrt{x^2+16}}$ şi identificarea coeficienţilor $2m = 4$, $n = a$, $16m = 4-n$ (1p).
Calcularea valorilor $m = 2$, $n = a = -28$ (1p).

Subiectul 4

Determinarea funcţiei

$$f(x) = \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) = \begin{cases} x,\ x \leq \dfrac{2}{1+x^2} \\ \dfrac{2}{1+x^2},\ \dfrac{2}{1+x^2} < x \end{cases} = \begin{cases} x,\ x^3+x-2 \leq 0 \\ \dfrac{2}{1+x^2},\ x^3+x-2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} x,\ x \in (-\infty, 1] \\ \dfrac{2}{1+x^2},\ x \in (1, +\infty) \end{cases}$$ (3p).

Continuitatea funcţiei (1p).

Calculul primitivei $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} + C,\ x \in (-\infty, 1] \\ 2\operatorname{arctg}x - \dfrac{\pi}{2} + C,\ x \in (1, +\infty) \end{cases}$ (2p).

Determinarea constantei din condiţia $F(0) = 2013$ şi $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2013,\ x \in (-\infty, 1] \\ 2\operatorname{arctg}x - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2} + 2013,\ x \in (1, +\infty) \end{cases}$ (1p).