

VIII

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală, 26 februarie 2017

Clasa a VIII – a

VARIANTA 1

Barem orientativ de corectare și notare:

1. a) $a + b =$ (după raționalizarea numitorilor)

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{2024} - \sqrt{2023} + \sqrt{2025} - \sqrt{2024} =$$

$$= -1 + 45 = 44 \quad (1p)$$

$$M_a = \frac{a+b}{2} = 22 \quad (1p)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}, (\forall) k \in N \Rightarrow a > b \quad (1p)$$

$$a > b / + a \Rightarrow 2a > a + b \Rightarrow 2a > 44 \Rightarrow a > 22 \quad (1p)$$

b) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \Rightarrow xy + xz + yz = \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}\right) : 2 = \frac{3}{4} \quad (1p)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0 \quad (1p)$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2} \quad (1p)$$

2.a) Cum $x^2 + x + 1 > 0$, vom obține: (1p)

$$3x^3 \leq 3x(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 \quad (1p)$$

$$3x^3 \leq 3x^3 + 3x^2 + 3x + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0 (A) (\forall) x \in R \quad (1p)$$

b) Pentru $n \in N$, inegalitatea de la punctul a) devine: $\frac{n^3}{n^2 + n + 1} < n + \frac{1}{3} \quad (1p)$

$$\frac{1}{3} < 1 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{7} < 2 + \frac{1}{3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{n^3}{n^2 + n + 1} < n + \frac{1}{3}$$

(1p)

Adunând aceste relații, obținem:

$$S < (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{3} = \frac{3n^2 + 5n}{6} = \frac{n(3n+5)}{6} \quad (2p)$$

3. a) $BB' = x, AB'^2 = 144 + x^2, AC'^2 = 288, B'C'^2 = 288 - 24x + x^2$

$$AB' = AC' \Rightarrow x = 12cm \quad (1p)$$

$$AB' = B'C' \Rightarrow x = 6cm \quad (1p)$$

$$AB' = B'C' \Rightarrow x = 0cm \text{ sau } x = 24cm \quad (1p)$$

b) $B'C' \cap BC = \{M\} \Rightarrow g = MA = (AB'C') \cap (ABC)$

$$MB = 12cm \text{ și dem. că } m(\angle MAC) = 90^\circ \quad (1p)$$

$$\text{Conf. } T3 \perp \Rightarrow C'A \perp MA \Rightarrow d(C', g) = C'A = 12\sqrt{2}cm. \quad (1p)$$

c) Ducem $CD \perp AC'$ și dem. că $CD \perp (AB'C')$ (1p)

Notăm $\{E\} = CO \cap AM, \{F\} = CO \cap AB$ și în planul (CED) ducem $OH \parallel CD$.

Din $OH \parallel CD$ și $CD \perp (AB'C') \Rightarrow OH \perp (AB'C')$

$$CO = 4\sqrt{3}cm, CE = 8\sqrt{3} \Rightarrow OH = \frac{CD}{2} = 3\sqrt{2}cm \quad (1p)$$

4. a) $OA \perp (ABC) \Rightarrow OA \perp BC$, dar $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (OAB)$ (1p)

Cum $AM \subset (OAB) \Rightarrow BC \perp AM$, $AM \perp OB \Rightarrow AM \perp (OBC)$ (1p)

Cum $OC \subset (OBC) \Rightarrow AM \perp OC$, dar $AN \perp OC \Rightarrow OC \perp (AMN)$ (1p)

Cum $MN \subset (AMN) \Rightarrow MN \perp OC$. Analog $NP \perp OC \Rightarrow OC \perp (MNP)$ (1p)

b) Folosim teorema catetei în $\triangle OAB, \triangle OAD$ și $\triangle OAC$

$$\frac{MB \cdot OB}{MO \cdot OB} = \frac{AB^2}{OA^2}, \frac{PD \cdot OD}{PO \cdot OD} = \frac{AD^2}{OA^2}, \frac{NC \cdot OC}{NO \cdot OC} = \frac{AC^2}{OA^2} \quad (2p)$$

$$\frac{MB}{MO} + \frac{PD}{PO} = \frac{AB^2 + AD^2}{OA^2} = \frac{AC^2}{OA^2} = \frac{NC}{NO} \quad (1p)$$

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.