

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a V-a

1. **a) (4p)** Comparați numerele $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2018$ și $B = 2018^2 - 2018 \cdot 1512$.
- b) (3p)** Determinați cel mai mic număr natural n care împărțit la numărul natural nenul p se obține câtul 5 și restul cel mai mare pătrat perfect de două cifre.

Prof. Sascău Gabriela

Soluție:

- a)** $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2018 = 2 \cdot 1009 \cdot 1010 : 2 = 1009 \cdot 1010$
 $B = 2018^2 - 2018 \cdot 1512 = 2018 (2018 - 1512) = 2018 \cdot 506 = 1009 \cdot 1012$, deci $A < B$.
- b)** Folosind teorema împărțirii cu rest avem $n = p \cdot 5 + 81$ și $81 < p$. Cel mai mic număr n se obține pentru $p = 82$, $n = 82 \cdot 5 + 81 = 491$.

Barem

a) $A = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1009)$	1p
$A = 2 \cdot 1009 \cdot 1010 : 2 = 1009 \cdot 1010$	1p
$B = 2018 (2018 - 1512) = 2018 \cdot 506 = 1009 \cdot 1012$	1p
$A < B$	1p
b) $n = p \cdot 5 + 81$	1p
$81 < p \Rightarrow p = 82$	1p
$n = 82 \cdot 5 + 81 = 491$	1p

2. **a) (4p)** Arătați că dacă 3 divide $\overline{abc}$ atunci 3 divide $4a + 7b + 10c$.

Prof. Ispășoiu Dorel

- b) (3p)** Se consideră numărul $N = 2 \cdot (8 \cdot \overline{abc} + \overline{abcabc})$, scris în sistemul zecimal. Arătați că numărul natural N se divide cu 2018.

Prof. Iacoviță Gheorghe

Soluție:

- a)** $\overline{abc} : 3 \Rightarrow a + b + c : 3$. Putem scrie $4a + 7b + 10c = \underbrace{a + b + c}_{:3} + \underbrace{3(a + 2b + 3c)}_{:3} \Rightarrow 4a + 7b + 10c : 3$
- b)** Numărul $N = 2 \cdot (8 \cdot \overline{abc} + \overline{abcabc})$ se mai scrie
 $N = 2 \cdot (8 \cdot \overline{abc} + 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc}) \Leftrightarrow N = 2018 \cdot \overline{abc} \Rightarrow N : 2018$.

Barem

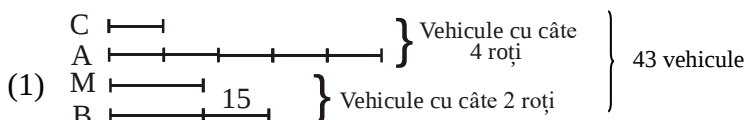
a)	$\overline{abc} : 3 \Leftrightarrow a + b + c : 3$	1p
	$4a + 7b + 10c = a + b + c + 3(a + 2b + 3c)$	1p
	$a + b + c : 3, 3(a + 2b + 3c) : 3 \Rightarrow 4a + 7b + 10c : 3$	2p
b)	$N = 2 \cdot (8 \cdot \overline{abc} + 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc})$	1p
	$N = 2018 \cdot \overline{abc}$	1p
	$N : 2018$	1p

3. (7p) Într-o zi, prin fața casei lui Aurel au trecut 43 de vehicule: camioane, autoturisme, motociclete și biciclete, în total 122 de roți. Știind că numărul camioanelor este de 5 ori mai mic decât numărul autoturismelor și că numărul bicicletelor este cu 15 mai mare decât cel al motocicletelor, aflați câte vehicule de fiecare fel au trecut în acea zi prin fața casei lui Aurel.

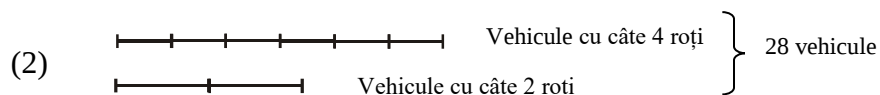
Prof. Boghian Stela

Soluție:

Fie C – numărul camioanelor, A – numărul autoturismelor, B – numărul bicicletelor și M – numărul motocicletelor. Conform datelor problemei se poate face schema:



Scădem 15 vehicule, rămânem cu 28 de vehicule care au în total $122 - 2 \cdot 15 = 92$ de roți. Problema se reduce la:



Presupunem că toate cele 28 de vehicule au câte două roți, rezultă că în total ar trebui să fie $2 \cdot 28 = 56$ (roți). Diferența de $92 - 56 = 36$ (roți) provine din faptul că sunt și vehicule cu 4 roți, care au cu 2 roți mai mult decât celelalte. În concluzie, sunt $36 : 2 = 18$ (vehicule cu 4 roți) și $28 - 18 = 10$ (vehicule cu 2 roți)

Folosind schema (2) rezultă:

- Numărul de camioane este $18 : 6 = 3$
- Numărul de autoturisme este $3 \cdot 5 = 15$
- Numărul de motociclete este $10 : 2 = 5$
- Numărul de biciclete este $5 + 15 = 20$.

Barem

Realizarea schemei 1	1p
Scădem 15 vehicule, rămânem cu 28 de vehicule care au în total $122 - 2 \cdot 15 = 92$ de roți	1p
Realizarea schemei 2	1p
Presupunem că toate cele 28 de vehicule au câte două roți, rezultă că în total ar trebui să fie $2 \cdot 28 = 56$ (roți). Diferența de $92 - 56 = 36$ (roți) provine din faptul că sunt și vehicule cu 4 roți, care au cu 2 roți mai mult decât celelalte. În concluzie, sunt $36 : 2 = 18$ (vehicule cu 4 roți) și $28 - 18 = 10$ (vehicule cu 2 roți)	2p
Folosind schema (2) se obține: - numărul de camioane este $18 : 6 = 3$ - numărul de autoturisme este $3 \cdot 5 = 15$ - numărul de motociclete este $10 : 2 = 5$ - numărul de biciclete este $5 + 15 = 20$	2p

4. (7p) Pe un cerc se consideră 50 de puncte. Matei vrea să scrie în fiecare punct numere diferite de la 1 la 50, astfel încât suma oricăror patru numere scrise în patru puncte consecutive să fie mai mică ca 103. Reușește Matei să scrie astfel cele 50 de numere?

Prof. Sascău Gabriela

Soluție:

Notăm cu $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ numerele scrise în cele 50 de puncte. Avem $x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 50 \cdot 51 : 2 = 1275$.

Presupunem că suma numerelor scrise în oricare patru puncte consecutive este mai mică sau egală cu 102. Astfel avem: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 102$, $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 102$, $\dots$, $x_{49} + x_{50} + x_1 + x_2 \leq 102$, $x_{50} + x_1 + x_2 + x_3 \leq 102$, de unde, adunând relațiile, obținem:

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{50}) \leq 102 \cdot 50, \text{ deci } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{50} \leq 1275.$$

Egalitatea se obține doar dacă în cele 50 relații de mai sus avem egalitate.

Dacă $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102$ și $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 102$, prin scădere obținem $x_1 = x_5$, ceea ce este fals, deoarece numerele înscrise sunt diferite. Presupunerea făcută este falsă, deci Matei nu reușește scrierea dorită.

Barem

$x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 50 \cdot 51 : 2 = 1275$	1p
Presupunem că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 102$, $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 102$, $\dots$, $x_{49} + x_{50} + x_1 + x_2 \leq 102$, $x_{50} + x_1 + x_2 + x_3 \leq 102$	1p
Adunând relațiile obținem $4(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{50}) \leq 102 \cdot 50$, de unde $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{50} \leq 1275$	2p
Egalitatea se obține doar dacă în cele 50 relații avem egalitate	1p
Dacă $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102$ și $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 102$, prin scădere obținem $x_1 = x_5$ $\Rightarrow$ presupunerea făcută este falsă deci Matei nu reușește scrierea dorită	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.