

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 16 Februarie 2014

Soluții
Clasa a XII-a

Problema 1: Oficiu 1 p.

a) 1 p.

Deoarece f este o funcție neconstantă deducem că $f \neq 0$ în $[0, 1]$. Cum $F(0) = F(1) = 0$ rezultă că f schimbă semnul în $[0, 1]$ (altfel, cum $f = F'$ ar rezulta că F ar fi fie crescătoare, fie descrescătoare pe $[0, 1]$ și cum $F(0) = F(1) = 0$ asta ar însemna $F \equiv 0$ în $[0, 1]$ fapt ce ar implica $f = 0$ în $[0, 1]$, contradicție cu presupunerea $f \neq 0$ în $[0, 1]$.) Astfel, $m < 0 < M$. Rezulta că dacă $G(1) = 0$ concluzia este clară.

b) 1 p.

Presupunem $G(1) \neq 0$. Înmulțind eventual f cu o constantă putem presupune că $M - m = 1$ (altfel înlocuim f cu $f/(M - m)$) și $G(1) > 0$ (dacă $G(1) < 0$ înmulțim f cu (-1) și avem în noua situație $G(1) > 0$ iar rolurile lui m și M se inversează).

c) 1 p.

Definim funcția $H : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$H(x) = \begin{cases} m, & 0 \leq x \leq M, \\ M, & M < x \leq 1, \end{cases}$$

și considerăm o primitivă a sa $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dată de

$$\theta(x) = \begin{cases} mx, & 0 \leq x \leq M, \\ Mx - M, & M < x \leq 1, \end{cases}$$

Notăm că $\theta(0) = \theta(1) = 0$.

d) 1 p.

Fie $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției $[0, 1] \ni x \rightarrow xH(x)$ dată de

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{mx^2}{2}, & 0 \leq x \leq M, \\ \frac{Mx^2}{2} - \frac{M^2}{2}, & M < x \leq 1, \end{cases}$$

Observăm că $\psi(0) = 0$ și cum $M - m = 1$ deducem că $\psi(1) = \frac{-mM}{2(M-m)}$. Din cele de mai sus deducem că pentru a încheia demonstrația este suficient să probăm că $G(1) < \psi(1)$.

e) 2 p.

Amintim ca $\psi'(x) = xH(x)$ iar $G'(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Cum $H(x) \leq f(x)$ pentru orice $x \in [0, M]$ iar $f(x) \leq H(x)$ pentru orice $x \in [M, 1]$. Din cele de mai sus deducem ca $x(f(x) - H(x)) \leq M(f(x) - H(x))$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Cu alte cuvinte am gasit ca $(G - \psi)'(x) \leq M(F - \theta)'(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$ sau $0 \leq [MF(x) - M\theta(x) - G(x) + \psi(x)]'$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Deci functia $[0, 1] \ni x \rightarrow MF(x) - M\theta(x) - G(x) + \psi(x)$ este crescatoare pe $[0, 1]$. Astfel $MF(1) - M\theta(1) - G(1) + \psi(1) \geq MF(0) - M\theta(0) - G(0) + \psi(0) = 0$, si tinand cont ca $F(1) = \theta(1) = 0$ gasim $\psi(1) \geq G(1)$ de unde concluzia.

Problema 2: Oficiu 1 p.

a) 2 p.

Presupunem ca $a \star c = b \star c$ si fie $e_a, d \in S$ satisfacand $a \star e_a = a$ si $c \star d = e_a$. Atunci

$$a = a \star e_a = a \star (c \star d) = (a \star c) \star d = (b \star c) \star d = b \star (c \star d) = b \star e_a.$$

b) 2p

Repetand rationamentul de mai sus schimband rolurile lui a cu b gasim ca exista $e_b \in S$ astfel incat $a \star e_b = b \star e_b = b$.

c) 2 p.

Din cele de mai sus deducem

$$a = b \star e_a = (a \star e_b) \star e_a = a \star (e_b \star e_a) = a \star (e_a \star e_b) = (a \star e_a) \star e_b = a \star e_b = b.$$

Problema 3: Oficiu 1p.

a) 1 p.

Observam ca

$$x \star y = (x - a)(y - a) + b - a^2.$$

b) 2 p.

Daca $b \geq a(a + 1)$ atunci pentru orice $x, y \in (a, \infty)$ avem

$$x \star y = (x - a)(y - a) + b - a^2 \geq b - a^2 \geq a,$$

deci $x \star y \in (a, \infty)$, i.e. (a, ∞) este o parte stabila a lui $\mathbf{R}$ in raport cu operatia $\star$.

c) 3 p.

Presupunem acum ca (a, ∞) este o parte stabila a lui $\mathbf{R}$ in raport cu operatia $\star$. Atunci pentru orice $\epsilon > 0$ avem $x_\epsilon := a + \epsilon \in (a, \infty)$ si $y_\epsilon := a + \epsilon \in (a, \infty)$. Deci $x_\epsilon \star y_\epsilon \in (a, \infty)$ pentru orice $\epsilon > 0$, sau echivalent $\epsilon^2 + b - a^2 > a$ pentru orice $\epsilon > 0$. Lasand $\epsilon \rightarrow 0$ in ultima inegalitate deducem $b \geq a^2 + a$, si demonstratia este completa.

Problema 4: Oficiu 1 p.

a) 2 p.

Facem schimbarea de variabila $\sqrt{1+x^2} = y$ si deci $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = dy$ si

$$I = \int \ln(1+y) dy.$$

b) 4 p.

Folosind formula de integrare prin parti gasim

$$\begin{aligned} I &= y \ln(1+y) - \int \frac{y}{1+y} dy = y \ln(1+y) - y + \ln(1+y) + C = (y+1) \ln(1+y) - y + C \\ &= (1+\sqrt{1+x^2}) \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$
