

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
17.02.2018
BAREM
CLASA VII A

Subiectul I

a) Dacă $a = k^2$ și $b = p^2$, atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} = k + p \in \mathbb{Q}$ 1p

Reciproc, notăm $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} = x - \sqrt{b} \Rightarrow a = x^2 - 2x\sqrt{b} + b$1p

$\sqrt{b} = \frac{x^2+b-a}{2x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = p^2$ și analog pentru a2p

b) Din punctul a) $n^2 + n + 2$ și $n! + 8$ sunt pătrate perfecte

pentru $n \geq 2 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + n + 2 > n^2$ contradicție 2p

Verificăm $n = 0, 1$ și doar $n = 1$ verifică1p

Subiectul II

a) Pentru alegerea $m = n = 4036$ se verifică relația $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2018}$ 1 p

b) Dacă $m, n \in A$ atunci $\frac{1}{m} = \frac{1}{2018} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2018}$, ($n > 0$)1 p

Inegalitatea $\frac{1}{m} < \frac{1}{2018}$, pentru $m > 0$, implică $m > 2018$.

Analog $n > 2018$1p

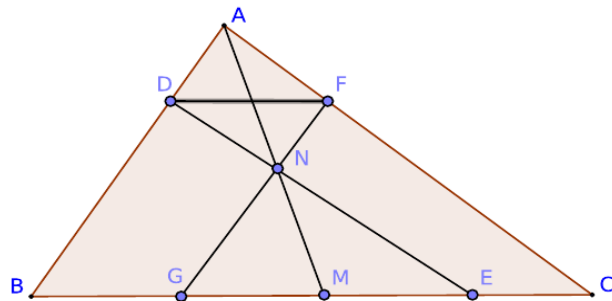
c) Are loc $\left(\frac{m}{2018} - 1\right)\left(\frac{n}{2018} - 1\right) = \frac{m \cdot n - 2018(m+n) + 2018^2}{2018^2}$ 1 p

Din relația $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2018}$ obținem $m \cdot n = 2018(m+n)$1 p

$$\sqrt{\left(\frac{m}{2018} - 1\right)\left(\frac{n}{2018} - 1\right)} = \sqrt{\frac{m \cdot n - 2018(m+n) + 2018^2}{2018^2}} = \sqrt{\frac{2018^2}{2018^2}} = 1 \quad \dots\dots\dots 1 p$$

Finalizare $B = \{1\}$ 1 p

Subiectul III

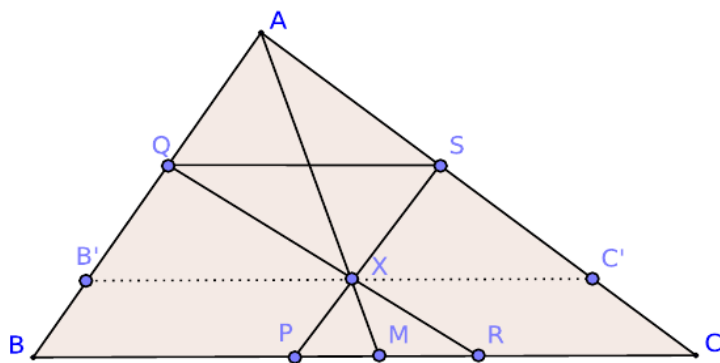


EN este linie mijlocie în $\triangle MAC$, rezultă *E* mijlocul *MC* și analog *G* 1p

Din teorema lui Thales obținem

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BE} = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{AF}{FC} = \frac{BG}{GC} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 1p$$

Din reciproca teoremei lui Thales $DF \parallel BC$ 1p

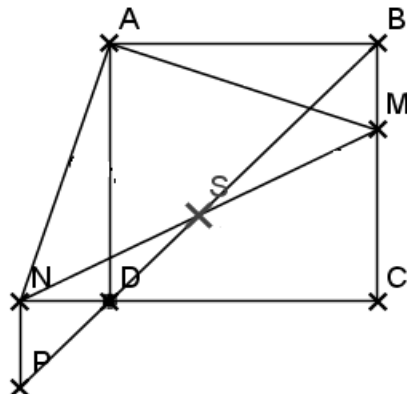


b) Construim prin *X* segmentul $B'C'$ paralel cu *BC*, *X* este mijlocul lui $B'C'$ 1p

Rezultă *Q* și *S* mijloacele segmentelor AB' respectiv AC' 2p

$QS \parallel B'C' \parallel BC$ 1p

Subiectul IV



a $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2BM = MC \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC$ 1 p

$\frac{CN}{ND} = 4 \Rightarrow CN = 4ND \Rightarrow CN = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}BC$ 1 p

b. Relațiile $AB \equiv AD$, $\sphericalangle(ABM) \equiv \sphericalangle(ADN) = 90^\circ$, $BM \equiv DN$ implică $\triangle ABM \equiv \triangle ADN$, ceea ce conduce la $\sphericalangle(BAM) \equiv \sphericalangle(DAN)$ 1 p

$\sphericalangle(MAN) = \sphericalangle(MAD) + \sphericalangle(DAN) = \sphericalangle(MAD) + \sphericalangle(BAM) = \sphericalangle(BAD) = 90^\circ$ 1 p

c. Considerăm $NP \perp NC$, $P \in (BD)$.

În $\triangle PND$ au loc: $\sphericalangle(PND) = 90^\circ$, $\sphericalangle(PDN) = 45^\circ$, de unde rezultă că $\triangle PND$ este isoscel, cu $NP \equiv BM$1 p

În patrulaterul $BMPN$ au loc: $BM \equiv NP$, $BM \parallel NP$ de unde $BMPN$ paralelogram.1 p

$MN \cap PB = \{S\}$, S fiind mijlocul segmentului $[MN] \Rightarrow D, B, S$ coliniare.1 p