

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 23 februarie 2018

CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Pentru ce valori ale lui n număr natural nenul, $a = \sqrt{1!+2!+3!+\dots+n!}$ este număr natural? ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) <i>G.M. nr. 1/2018</i>	
	b) Câte numere naturale $\overline{abcd}$ există astfel încât $\sqrt{20 \cdot 18 \cdot \overline{abcd}} \in N$?	
	a) Pentru $n = 1$; $a = \sqrt{1!} = 1 \in N$ Pentru $n = 2$; $a = \sqrt{1!+2!} = \sqrt{3} \notin N$ Pentru $n = 3$; $a = \sqrt{1!+2!+3!} = \sqrt{9} = 3 \in N$ Pentru $n = 4$; $a = \sqrt{1!+2!+3!+4!} = \sqrt{33} \notin N$	1p
	Pentru $n \geq 5$, $u(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = 0$	1p
	$u(1!+2!+3!+4!) + u(5!+6!+\dots+n!) = 3 + 0 = 3$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow a \notin N$	1p
	Soluțiile sunt: $n = 1$ și $n = 3$.	
	b) $20 \cdot 18 = 360 = 36 \cdot 10 = 6^2 \cdot 10$ $\sqrt{20 \cdot 18 \cdot \overline{abcd}} \in N \Rightarrow 20 \cdot 18 \cdot \overline{abcd} = \text{pătrat perfect} \Rightarrow \overline{abcd} : 10 \Rightarrow d = 0$	1p
	$20 \cdot 18 \cdot \overline{abcd} = 3600 \cdot \overline{abc} = 60^2 \cdot \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} = \text{pătrat perfect de 3 cifre}$	1p
	$10^2 = 100, 11^2 = 121, \dots, 31^2 = 961, 32^2 = 1024 \Rightarrow \overline{abc} \in \{100, 121, \dots, 961\}$ și $d = 0$.	1p
	$\Rightarrow$ sunt $31 - 10 + 1 = 22$ soluții	
2.	Fie $m, n \in N^*$ astfel încât $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2018^0 - 0^{2018}}{2017^1 - 1^{2017}}$. Arătați că $A = \left(\frac{m}{14} - 144\right) \cdot \left(\frac{n}{14} - 144\right)$ este pătrat perfect.	
	$2018^0 - 0^{2018} = 1$	1p
	$2017^1 - 1^{2017} = 2016$	1p
	Observă că $14 \cdot 144 = 2016$	1p
	$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2016} \Rightarrow \frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{1}{2016} = \frac{1}{14 \cdot 144} \Rightarrow \frac{m}{14} = \frac{144(m+n)}{n}$	1p
	$\frac{m}{14} - 144 = 144 \cdot \frac{m}{n}$	1p
	Analog $\frac{n}{14} - 144 = 144 \cdot \frac{n}{m}$	1p

	$A = 144 \cdot \frac{m}{n} \cdot 144 \cdot \frac{n}{m} = 144^2$	1p
3.	În triunghiul $\triangle ABC$ se consideră bisectoarele $[BE]$, $[CF]$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ și mediana $[AD]$, $D \in (BC)$. Fie $CF \cap AD = \{M\}$, $BE \cap AD = \{N\}$. Arătați că $\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} > 2$.	
	Se aplică Teorema bisectoarei în $\triangle ABD$, $\frac{AB}{BD} = \frac{AN}{ND}$	1p
	Se aplică Teorema bisectoarei în $\triangle ADC$, $\frac{AC}{CD} = \frac{AM}{MD}$	1p
	$BD = CD = \frac{BC}{2}$	1p
	$\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} = \frac{AB}{BD} + \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{\frac{BC}{2}}$	1p
	Se aplică inegalitatea triunghiului în $\triangle ABC$ și avem că $AB + AC > BC$	1p
	$\Rightarrow \frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} > \frac{BC}{\frac{BC}{2}}$	1p
	$\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} > 2$	1p
4.	Într-un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, cunoaștem $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$, $A_{MCD} = 12 \text{ cm}^2$, unde M este mijlocul segmentului $[BC]$. Aflați aria trapezului $ABCD$. R.M.T. nr. 4/2016	
	Fie N mijlocul lui $[AD]$, $x = AB$ și $y = CD$. Atunci $ABMN$ și $CDNM$ sunt trapeze care au înălțimi egale, h .	1p
	$A_{MCD} = \frac{CD \cdot h}{2} = \frac{y \cdot h}{2}$; $A_{MAB} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{x \cdot h}{2} \Rightarrow A_{MCD} + A_{MAB} = \frac{(x+y) \cdot h}{2}$	1p
	$\frac{A_{MCD}}{A_{MAB}} = \frac{y \cdot h}{2} : \frac{x \cdot h}{2} = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$	1p
	$\frac{12}{A_{MAB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_{MAB} = 18 \text{ cm}^2$	1p
	$A_{NDM} + A_{NAM} = \frac{NM \cdot h}{2} + \frac{NM \cdot h}{2} = NM \cdot h = \frac{x+y}{2} \cdot h = A_{MCD} + A_{MAB} = 12 + 18 = 30 \text{ cm}^2$	2p
	$A_{ABCD} = (A_{MCD} + A_{MAB}) + (A_{NDM} + A_{NAM}) = 30 + 30 = 60 \text{ cm}^2$	1p