



Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a X-a

Subiectul I**Subiectul I**

Se consideră funcțiile

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}, g(x) = 4x + 2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{5x^2 + 4x\sqrt{x^2 + 1} + 2}$. Să se demonstreze că f și g sunt bijective.

Subiectul II

Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [2, 3]$. Arătați că
 $\log_{a_1}(5a_1 - 6) + \log_{a_2}(5a_2 - 6) + \dots + \log_{a_n}(5a_n - 6) \geq 2n, n \geq 1$

Subiectul III

Arătați că, dacă $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ și $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n|$, atunci

$$\left(1 + \frac{z_1}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_2}{z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{z_n}{z_{n-1}}\right) \left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbb{R}.$$

Subiectul IV

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $z_1 \neq z_2$ astfel încât $|z_1| = |z_2|, z_1 + \frac{1}{z_2} \in \mathbb{R}, z_2 + \frac{1}{z_1} \in \mathbb{R}$. Arătați că pentru orice

$$n \in \mathbb{N}, z_1^{2n+1} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} \in \mathbb{R}, z_2^{2n+1} + \frac{1}{z_1^{2n+1}} \in \mathbb{R}.$$

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.