

Barem de notare – clasa a V-a

Problema1. Determinați mulțimile A și B , formate din numere naturale, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $A - B = \{2, 5, 6\}$;

b) $B - A = \{0, 7\}$;

c) $\text{card } A \cap B = 3$;

d) suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este 28.

Soluție și barem:

Din a) $\Rightarrow 2, 5, 6 \in A$ și $2, 5, 6 \notin B$.	1p
Din b) $\Rightarrow 0, 7 \in B$ și $0, 7 \notin A$.	1p
Din c) $\Rightarrow A \cap B = \{x_1, x_2, x_3\}$ și utilizând d) obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 8$.	1p
Cum elementele x_1, x_2, x_3 sunt diferite între ele și diferite de 0, 2, 5, 6, 7, obținem $\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; 3; 4\}$	2p
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $B = \{0; 1; 3; 4; 7\}$.	2p

Problema 2. Să se arate că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1+3+5+\dots+(2n+1)=2^{2017}+2016$.

Soluție și barem:

$1+3+5+\dots+(2n+1)=$ $= 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 + \dots + 2 \cdot n + 1$ $= 2 \cdot (1+2+3+\dots+n) + (n+1)$ $= n \cdot (n+1) + (n+1)$ $= (n+1)^2$ Suma se poate calcula și aplicând formula progresiei aritmetice. Obținem membrul stâng pătrat perfect.	2p
$U(2^{2017}) = 2$ $U(2^{2017} + 2016) = 8$	2p 1p
Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul nu este pătrat perfect. Deci, membrul drept nu este pătrat perfect. Cum membrul stâng este pătrat perfect și membrul drept nu este pătrat perfect, atunci nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât să aibă loc egalitatea.	1p 1p

Problema 3. Fie numărul $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{2017 \text{ cifre}} + 2017$.

a) Arătați că numărul A este divizibil cu 10;

b) Aflați câtul și restul împărțirii numărului A la 111.

Soluție și barem:

$A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{2017 \text{ cifre}} + 2017 =$ $A = (9+1) + (99+1) + (999+1) + \dots + \left(\underbrace{999\dots 9}_{2017 \text{ cifre}} + 1 \right)$ a) $A = 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{1000\dots 0}_{2017 \text{ de } 0}$ $A = \underbrace{111\dots 10}_{2017 \text{ de } 1}$	2p
Cum $U(A) = 0 \Rightarrow A$ este divizibil cu 10.	1p
Sau a) $U \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{2017 \text{ cifre}} \right) = U(2017 \cdot 9) = 3$ $U \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{2017 \text{ cifre}} + 2017 \right) = 0$ Obținem că numărul A se termină în 0, deci este divizibil cu 10.	3p

b) $A:111=C \text{ rest } R, 0 \leq R < 111 \Rightarrow A=111 \cdot C + R, 0 \leq R < 111$	1p
Din punctul a) avem $A = \underbrace{111 \dots 10}_{2017 \text{ cifre}} =$ $= 111 \cdot 10^{2015} + 111 \cdot 10^{2012} + 111 \cdot 10^{2009} + \dots + 111 \cdot 10^2 + 10$ $= 111 \cdot (10^{2015} + 10^{2012} + 10^{2009} + \dots + 10^2) + 10$	2p
Obținem $C = 10^{2015} + 10^{2012} + 10^{2009} + \dots + 10^2$ și $R = 10$	1p

Problema 4. Determinați numerele $\overline{abcd}$ știind că $\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{abd} = \overline{abcd}$.

Gazeta matematică

Soluție și barem:

$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{abd} = \overline{abcd}$, $a, c \neq 0$ $\overline{ab} \cdot \overline{cd} + 10 \cdot \overline{ab} + d = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$	1p
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + d = 90 \cdot \overline{ab} + 10 \cdot c + d$	0,5p
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 90 \cdot \overline{ab} + 10 \cdot c$	0,5p
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 90 \cdot \overline{ab} = 10 \cdot c$	0,5p
$\overline{ab} \cdot (\overline{cd} - 90) = 10 \cdot c$ $\overline{cd} - 90 > 0 \Rightarrow c = 9$	0,5p 0,5p
$\overline{ab} \cdot (9d - 90) = 90 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot d = 90$	1p
Cum d este cifră și divizor al lui 90, obținem $d \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$	1,5p
Numerele sunt: $\overline{abcd} \in \{9091, 4592, 3093, 1895, 1596, 1099\}$.	1p

Barem de notare – clasa a VII-a

Problema 1. Calculați numerele:

$$a = \sqrt{\frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \dots + \frac{110}{1089} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}\right)}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} - \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \right]$$

Soluție și barem:

Notăm: $S_1 = \frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \dots + \frac{110}{1089}$, sumă ce are $1089:11=99$ termeni.	0,25p
Notăm: $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}$, sumă ce are 99 termeni.	0,25p
Regrupând termenii, obținem $S_1 - S_2 = \left(\frac{12}{11} - 1\right) + \left(\frac{13}{22} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{110}{1089} - \frac{1}{99}\right) \Leftrightarrow$	1p
$S_1 - S_2 = \underbrace{\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11}}_{99 \text{ termeni}} = \frac{1}{11} \cdot 99 = 9.$	1p
Așadar, $a = \sqrt{9} = 3.$	0,5p

$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} \right]$	1p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} \right]$	0,5p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3})$	0,5p
Avem $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ și $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$	0,5p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{2} + \sqrt{3} - (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right]$	0,5p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 2$	1p

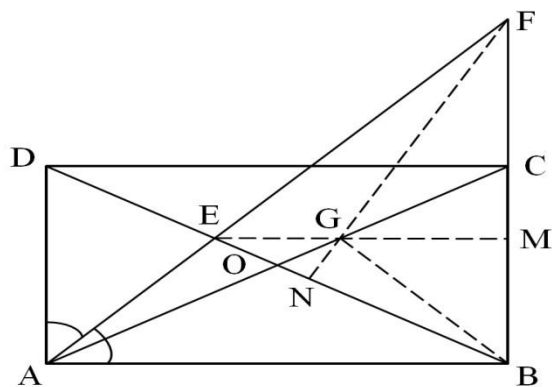
Problema 2. Utilizând formula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, aflați câte soluții, în mulțimea numerelor întregi nenegative, are ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$.

Soluție și barem:

$\sqrt{1960} = \sqrt{196 \cdot 10} = 14\sqrt{10}$	0,25p
$\sqrt{x} = \sqrt{1960} - \sqrt{y}$ (1) și cum $\sqrt{x} \geq 0$ obținem că $\sqrt{1960} \geq \sqrt{y} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1960$.	0,25p
Ridicând relația (1) la pătrat, obținem $x = 1960 - 28\sqrt{10y} + y \Rightarrow \sqrt{10y} = \frac{1960 + y - x}{28} \in Q$.	1,5p
Se aplică proprietatea: dacă $n \in N$ și $\sqrt{n} \in Q$ atunci $\sqrt{n} \in N$.	1p
Așadar, din $\sqrt{10y} \in Q$ și $10y \in N \Rightarrow \sqrt{10y} \in N$. Altfel spus, $\exists k \in N$ astfel încât $\sqrt{10y} = k \Rightarrow 10y = k^2 \Rightarrow 10 / k^2 \Rightarrow 10 / k$.	1p
Rezultă că $\exists a \in N$ astfel încât $k = 10a$.	0,5p
Din $10y = k^2$ și $k = 10a$, obținem că $10y = 10^2 a^2 \Rightarrow y = 10a^2, a \in N$.	0,5p
Analog, obținem și că $x = 10b^2, b \in N$.	0,5p
Ecuația din enunț devine: $\sqrt{10a^2} + \sqrt{10b^2} = 14\sqrt{10} \Rightarrow a + b = 14$.	0,5p
Cum $a, b \in N \Rightarrow (a, b) \in \{(0,14), (1,13), (2,12), \dots, (13,1), (14,0)\}$.	0,5p
În concluzie, ecuația dată are 15 soluții în $N \times N$.	0,5p

Problema 3 Considerăm dreptunghiul $ABCD$ în care bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează BD în E și BC în F . Paralela prin E la AB intersectează AC în punctul G . Arătați că $FG \perp BD$.

Soluție și barem:



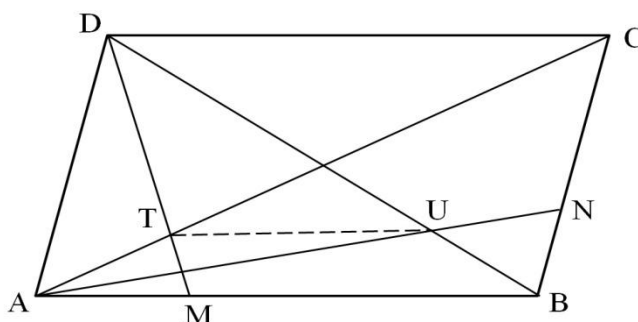
Fie $EG \cap BC = \{M\}$ și $FG \cap BD = \{N\}$. Din $EM \parallel AB$ și $AB \perp BF \Rightarrow EM \perp BF$.	0,5p
Deoarece trebuie demonstrat că $FG \perp BD$ și cum $EG \perp BF$, este suficient de demonstrat că punctul G este ortocentrul triunghiului EBF .	1p
Așadar, trebuie demonstrat că $BG \perp EF$.	1p
În triunghiul ABF avem că $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$, de unde rezultă că $\triangle ABF$ este dreptunghic isoscel în B (1)	1p
$ABGE$ trapez isoscel deoarece $EG \parallel AB$ și $AO = OB$.	1p
Se obține că $m(\sphericalangle GBA) = m(\sphericalangle EAB) = 45^\circ$, de unde $m(\sphericalangle FBG) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$	1p
Deci obținem că BG este bisectoarea $\sphericalangle ABF$ (2)	1p
Din (1) și (2) obținem că $BG \perp EF$ q.e.d.	0,5p

Problema 4. Fie ABCD un paralelogram. Pe segmentele (AB) și (BC), se iau punctele M, respectiv N, astfel încât $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{CN}$.

Dacă $\{T\} = DM \cap AC$ și $\{U\} = BD \cap AN$, demonstrați că $AB \parallel TU$.

Gazeta matematică

Soluție și barem:



În $\triangle ADU$, $BN \parallel DA \xrightarrow{T.F.A.} \triangle DUA \sim \triangle BUN \Rightarrow \frac{DU}{BU} = \frac{UA}{UN} = \frac{DA}{BN} = \frac{BC}{BN}$ (1)	2,5p
În $\triangle DTC$, $DC \parallel AM \xrightarrow{T.F.A.} \triangle DTC \sim \triangle MTA \Rightarrow \frac{DT}{MT} = \frac{TC}{TA} = \frac{DC}{MA} = \frac{AB}{MA}$ (2)	2,5p
Din $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{CN} \Rightarrow \frac{AB}{AB - BM} = \frac{BC}{BC - CN} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{BN}$ (3)	0,5p
Din relațiile (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{DU}{BU} = \frac{DT}{MT} \xrightarrow{T.Rec.Th} TU \parallel MB$.	1p
Cum $M \in (AB)$ obținem că $TU \parallel AB$.	0,5p

Barem de notare – clasa a VIII-a

Problema 1. Să se arate că pentru orice numere reale $x, y, z > 0$, cu $\sqrt{z} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, este adevărată relația:

$$\frac{x + y - z + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}} \leq \frac{x + y + z + 3}{2}.$$

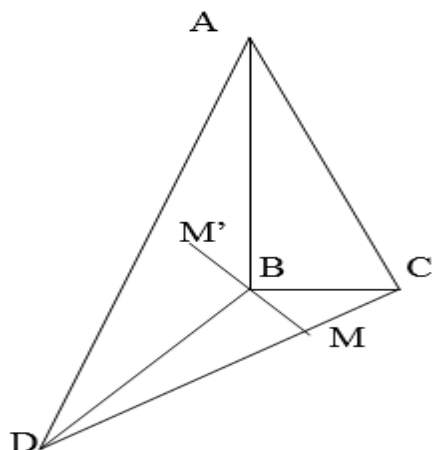
Gazeta matematică

Soluție și barem:

	Rezolvare	Punctaj
1.	Relația din enunț este echivalentă cu: $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \sqrt{z}^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}} \leq \frac{x + y + z + 3}{2} \Leftrightarrow$	1p
2.	$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})} \leq \frac{x + y + z + 3}{2} \Leftrightarrow$	1p
3.	$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \frac{x + y + z + 3}{2} \mid \cdot 2 \Leftrightarrow$	1p
4.	$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z} \leq x + y + z + 3 \Leftrightarrow$	1p
5.	$\Leftrightarrow 0 \leq x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 + z - 2\sqrt{z} + 1$	2p
6.	$\Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 + (\sqrt{z} - 1)^2.$ Cum ultima relație este adevărată, deoarece este o sumă de numere nenegative, înseamnă că și relația din enunț, care este echivalentă cu ea, este adevărată.	1p

Problema 2. În tetraedrul ABCD, cu lungimile muchiilor AB, BC și CA proporționale cu numerele 3,4 respectiv 5, se construiește M' simetricul lui M față de B, unde $M \in (CD)$. Arătați că $AM = AM'$ dacă și numai dacă $AB \perp (BCD)$.

Soluție și barem:



	Rezolvare	Punctaj
1.	$(\Rightarrow) AM = AM' \Rightarrow AB \perp (BCD)$ Din $AM = AM' \Rightarrow \triangle AMM'$ este isoscel M' simetricul lui M față de $B \Rightarrow M'B = MB \Rightarrow [AB]$ este mediană $\Rightarrow [AB]$ este înălțime $\Rightarrow AB \perp MM' (1)$ Din (AB, BC, CA) direct proporționale cu $(3,4,5) \Rightarrow AB = 3k,$	1p 1p

	$BC = 4k, CA = 5k \Rightarrow$ conform teoremei reciproce a lui Pitagora $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ dreptunghic în $B \Rightarrow AB \perp BC$ (2) $\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow AB \perp (BCD)$	1p 1p
2.	$(\Leftarrow) AB \perp (BCD) \Rightarrow AM = AM'$ $\text{Din } M' \text{ simetricul lui } M \text{ față de } B \Rightarrow M'B = MB \Rightarrow [AB] \text{ este mediană}$ $\text{Din } AB \perp (BCD) \Rightarrow [AB] \text{ este înălțime}$ $\Rightarrow \triangle AMM' \text{ este isoscel} \Rightarrow AM = AM'$	1p 1p 1p

Problema 3. Într-o urnă se află o bilă cu cifra 1 înscrisă pe ea , două bile cu cifra 2 înscrisă pe fiecare dintre ele și așa mai departe , n bile cu numărul n înscris pe fiecare dintre ele . Se extrag două bile și probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două bile extrase să fie $2n-1$ este $\frac{1}{9}$.

Calculați n.

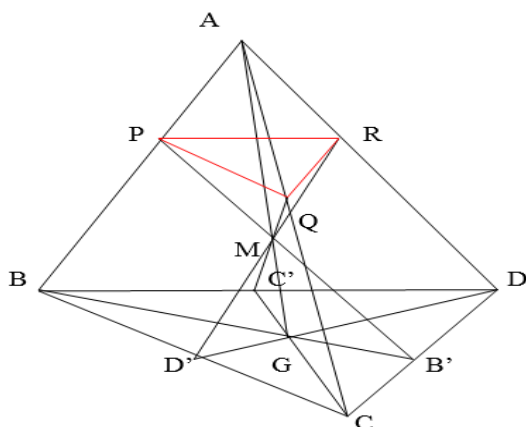
Soluție și barem:

	Rezolvare	Punctaj
1.	În urnă se află $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ bile.	1 p
2.	Numărul total de cazuri este: $1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] \cdot \frac{1}{2} =$ $= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 2)}{8} = \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{8}.$	3p
3.	Pentru a calcula numărul cazurilor favorabile trebuie să ținem cont că suma $2n-1$ se poate obține doar dacă pe una din bile este scris $n-1$ și pe cealaltă n, deci sunt $n(n-1)$ cazuri favorabile.	1 p
4.	$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. total de cazuri}} = \frac{n(n-1)}{\frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}} = \frac{1}{9}$ $\frac{8}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{9} \Rightarrow (n+1)(n+2) = 8 \cdot 9 \Rightarrow n = 7.$	2 p

Problema 4. Fie A, B, C, D puncte necoplanare, G centrul de greutate al triunghiului BCD și punctul $M \in (AG)$. Fie $\{P\} = AB \cap (CDM)$, $\{Q\} = AC \cap (BDM)$ și $\{R\} = AD \cap (BCM)$.

- a) Arătați că $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$; b) Demonstrați că $(PQR) \parallel (BCD)$.

Soluție și barem:



	Rezolvare	Punctaj
1.	G centrul de greutate al triunghiului BCD $\Rightarrow D'G = \frac{1}{3} \cdot DD' \Rightarrow \frac{DD'}{D'G} = 3$. În $\triangle ABB' \Rightarrow B'M \cap AB = \{P\} \Rightarrow P \in AB, P \in B'M$ $B' \in CD, CD \subset (CDM) \Rightarrow B' \in (CDM)$ $M \in (CDM)$ $\Rightarrow \{P\} = AB \cap (CDM)$. Analog, $D'M \cap AD = \{R\} \Rightarrow \{R\} = AD \cap (BCM)$, $C'M \cap AC = \{Q\} \Rightarrow \{Q\} = AC \cap (BDM)$.	2p
2.	În $\triangle ADG$, cu transversala $RD' \Rightarrow$ conform teoremei lui Menelaus $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AR}{RD} \cdot \frac{DD'}{D'G} \cdot \frac{MG}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MG} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$. (1)	2p
3.	În $\triangle ABG$, cu transversala $PB' \Rightarrow$ conform teoremei lui Menelaus $\Rightarrow$	1p

	$\Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'G} \cdot \frac{MG}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MG} = 3 \cdot \frac{AP}{PB} \cdot (2)$ $\left. \begin{array}{l} \text{Din (1)} \Rightarrow \frac{AR}{DR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{MG} \\ \text{Din (1)} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{MG} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD} \Rightarrow \text{conform teoremei}$ $\left. \begin{array}{l} \text{reciproce a lui Thales} \Rightarrow PR \parallel BD \\ \text{Analog} \Rightarrow PQ \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow (PQR) \parallel (BCD)$	1p 1p
--	---	---------------------

Barem de notare – clasa a VI-a

Problema 1. Numărul $\overline{aaa8}$ împărțit la un număr de două cifre dă restul 98. Aflați numărul.

Gazeta matematică

Soluție și barem:

Deoarece împărțitorul are două cifre și este mai mare decât restul, deducem că acesta este 99. **(1,5p)**

Atunci $\overline{aaa8} = 99c + 98 \Rightarrow \overline{aaa9} = 99(c+1)$ **(2p)**

Obținem $11 \overline{aaa9}$ și $\overline{aaa9} = 1100a + \overline{a9}$. **(2p)**

Cum $11 \overline{1100}$ rezultă $11 \overline{a9} \Rightarrow a = 9$. **(1p)**

Numărul căutat este 9998. **(0,5p)**

Problema 2. a) Fie șirul 1,2,4,7,11,..... de numere naturale.

i) Scrieți următorii doi termeni ai șirului;

ii) Să se determine termenul de pe locul 100.

b) Arătați că numărul:

$$x = 2(1 + 2 + \dots + 100) \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} \right) \text{ este pătrat perfect.}$$

Soluție și barem:

a) i) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11 \Rightarrow a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_2 + 2, a_4 = a_3 + 3, a_5 = a_4 + 4$ **(1p)**

Obținem $a_6 = a_5 + 5 = 16, a_7 = a_6 + 6 = 22$ **(0,5p)**

ii) $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, \dots, a_{100} - a_{99} = 99$ **(1p)**

Adunând relațiile obținem: $a_{100} - a_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$ **(1,25p)**

Obținem $a_{100} = 4951$ **(0,25p)**

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2}$ **(1p)**

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$
 (1,25p)

$$x = 2 \cdot \frac{101 \cdot 100}{2} \cdot \frac{100}{101}$$
 (0,5p)

$$x = 100^2$$

Deci x este pătrat perfect. **(0,25p)**

Problema 3. Fie $A = 2^{3n+1} \cdot 3^n + 15 \cdot 7^n$ și $B = 2^{4n+2} \cdot 3^{2n+2} + 4 \cdot 5^{2n+2}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că fracția $\frac{A}{B}$ se simplifică prin 17.

Soluție și barem:

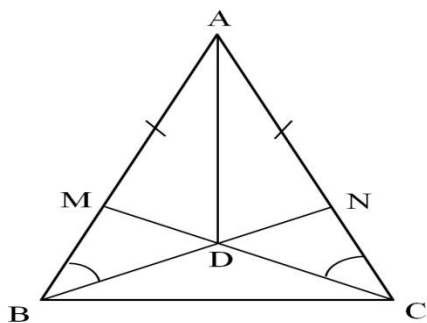
Trebuie să demonstrăm că A și B sunt multipli de 17. (1p)

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot 24^n + 15 \cdot 7^n = 2 \cdot (17 + 7)^n + 15 \cdot 7^n = 2 \cdot (M_{17} + 7^n) + 15 \cdot 7^n = M_{17} + 2 \cdot 7^n + 15 \cdot 7^n = M_{17} + 17 \cdot 7^n = M_{17} (3p) \\ B &= 4 \cdot 16^n \cdot 9 \cdot 9^n + 100 \cdot 25^n = 36 \cdot 144^n + 100 \cdot 25^n = 36 \cdot (136 + 8)^n + 100 \cdot (17 + 8)^n = 36 \cdot (M_{17} + 8^n) + 100 \cdot (M_{17} + 8^n) \\ &= M_{17} + 36 \cdot 8^n + 100 \cdot 8^n = M_{17} + 136 \cdot 8^n = M_{17} (3p). \end{aligned}$$

Problema 4. Fie triunghiul ABC, isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$, M un punct pe latura $[AB]$ și N un punct pe latura $[AC]$ astfel încât $AM - MB = AN - NC$. Arătați că:

- $[BN] \equiv [CM]$;
- $[AD]$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$, unde $BN \cap CM = \{D\}$.

Soluție și barem:



a) Din ipoteză avem că $AM - MB = AN - NC$. $AB = AC \Rightarrow AM + MB = AN + NC$. Adunând membru cu membru relațiile, se obține că $2AM = 2AN \Leftrightarrow AM = AN$.	2,5p
Avem $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$ (LUL), de unde rezultă că $[BN] \equiv [CM]$ și $\angle ABN \equiv \angle ACM$	2,5p
b) $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (LLU), de unde rezultă că	1,5p
$\angle BAD \equiv \angle CAD \Rightarrow [AD]$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.	0,5p