

Bareme și Soluții Olimpiada Locala de matematică Dâmbovița
Clasa a XII-a, 17-02-2019

Subiectul 1. Pe mulțimea $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție " $\circ$ " prin:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

- a) Demonstrați că $(G, \circ)$ este grup necomutativ.
 b) Arătați că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

Soluție. a) Se verifică că " $\circ$ " este lege de compoziție pe G , este asociativă și perechea $(1, 0)$ este element neutru. Orice element (a, b) este inversabil cu $(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$. Așadar $(G, \circ)$ este grup. Legea este necomutativă: $(1, 2) \circ (3, 4) = (3, 10) \neq (3, 6) = (3, 4) \circ (1, 2)$ **4p**

b) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, perechea $(-1, a)$ este un element de ordin 2. Dacă $(a, b) \in G$ este un element de ordin 3, atunci $(1, 0) = (a, b)^3 = (a^3, b(a^2 + a + 1)) \Rightarrow a = 1, b = 0$. Dar $(1, 0)$ este element neutru și are ordinul unu, astfel că G nu conține elemente de ordinul 3. **3p**

Subiectul 2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$ notăm

$$F_n = \int x^n \sqrt{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$$

- a) Să se calculeze F_1 și F_2 .
 b) Să se stabilească o relație de recurență pentru șirul $(F_n)_{n \geq 1}$.

Soluție. a) Notând $x^2 + 1 = t$, obținem

$$F_1 = \frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + C$$

..... **1p**

Integrând prin părți și folosind că

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

deducem

$$F_2 = \frac{1}{4}x(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{4} \int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{8}x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

..... **3p**

b) Procedând analog și integrând prin părți

$$F_n = \frac{1}{n+2}x^{n+1}\sqrt{x^2 + 1} - \frac{n-1}{n+2}F_{n-2}, n \geq 3$$

..... **3p**

Subiectul 3. a) Să se arate că $\int_{-1}^1 \ln(x^2 + x + 1) dx = \int_{-1}^1 \ln(x^2 - x + 1) dx$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \ln(x^4 + x^2 + 1) dx$.

Soluție. a) Schimbare de variabilă $x = -t$ în prima integrală **2p**

b) Avem $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ **1p**

Deducem

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \ln(x^4 + x^2 + 1) dx &= 2 \int_{-1}^1 \ln(x^2 + x + 1) dx = \\ &= 2 \left(x \ln(x^2 + x + 1) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \right) = \\ &= 2 \left(\ln 3 - \int_{-1}^1 \left(2 - \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} - \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} \right) dx \right) = \\ &= 2 \ln 3 - 8 + \ln(x^2 + x + 1) \Big|_{-1}^1 + 3 \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= 3 \ln 3 - 8 + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 = 3 \ln 3 - 8 + \frac{6}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 3 \ln 3 - 8 + \pi \sqrt{3}. \end{aligned}$$

..... **4p**

Subiectul 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup pentru care funcția $f : G \rightarrow G, f(x) = x^4$, este morfism injectiv de grupuri iar funcția $g : G \rightarrow G, g(x) = x^{2019}$, este morfism surjectiv de grupuri. Să se arate că $(G, \cdot)$ este comutativ.

Marius Mîinea

Soluție. f morfism, $(xy)^3 = y^3x^3, x^4y^3 = y^3x^4$; g morfism, $(xy)^{2018} = y^{2018}x^{2018}, x^{2018}y^{2019} = y^{2019}x^{2018}$ **3p**

Deducem $x^{2016}y^{2019} = y^{2019}x^{2016}, y^{2019}x^2 = x^2y^{2019}$ **2p**

Din surjectivitate $yx^2 = x^2y$ deci $(xy)^4 = x^4y^4 = y^4x^4 = (yx)^4$ și din injectivitate concluzia **2p**