

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimile $M = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, m, n \text{ impare} \right\}$ și $G = M \times \mathbf{Z}$. Pe mulțimea G se definește legea de compoziție $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2)$, $\forall x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$.

- a) Calculați $(1,1) * (1,2) * \dots * (1,2018)$;
- b) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian;
- c) Arătați că funcția $f : G \rightarrow \mathbf{Q}^*$, $f((x, y)) = x \cdot 2018^y$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.
 - b) Aflați o primitivă a restricției funcției f la intervalul $[0, \pi]$.
3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Presupunem că există o funcție $f : G \rightarrow G$ injectivă astfel încât are loc relația: $x \cdot f(x^{2013} \cdot f(y)) = x^{2015} \cdot f(x \cdot y)$, $\forall x, y \in G$. Demonstrați că grupul $(G, \cdot)$ este abelian.
(Supliment G.M. 2015)

4. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$. Calculați $\int_0^1 \frac{f(2018^t)}{f(2018^{-t})} dt$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.