

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapă locală Dâmbovița, 28 februarie 2015
clasa a IX a

Subiectul 1. Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

a) $1 \in G$

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$

Arătați că $\sqrt{2015} \in G$.

Lucian Dragomir (GM 12/2014)

Subiectul 2. Fie $a, b, c, n > 0$ cu $a + b + c = 1$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a}{bc(b+nc)} + \frac{b}{ca(c+na)} + \frac{c}{ab(a+nb)} \geq \frac{27}{n+1}$$

Marin Chirciu (RMT)

Subiectul 3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x = \frac{\{x\}}{[x]}$

b) $[x] \cdot \{x\} = [x] - \{x\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x și $\{x\}$ partea fracționară a lui x .

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi în care $(b+c)\overrightarrow{PA} + (c+a)\overrightarrow{PB} + (a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde $P \in \{O, I, G\}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral. (Notațiile sunt cele uzuale.)

Daniel Jinga (GM 10/2014)

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.