BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Arătaţi că $\sqrt{\frac{1\cdot 2}{3^2}}+\sqrt{\frac{2\cdot 3}{5^2}}+\sqrt{\frac{3\cdot 4}{7^2}}+.....+\sqrt{\frac{4028\cdot 4029}{8057^2}}\le 2014$.

Prof. Sascău Gabriela

b) (3p) Fie $x=\sqrt{\left[\frac{7}{6}+\frac{8}{12}+\frac{9}{18}+...+\frac{506}{3000}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{500}\right)\right]\cdot 6}$. Arătaţi că $x\notin\mathbb{Q}$.

Prof. Stratulat Ana

Soluție: a) Folosind inegalitatea mediilor avem: $\sqrt{\frac{1\cdot 2}{3^2}}=\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\le\frac{1+2}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}\le\frac{1}{2}$, ... , $\sqrt{\frac{4028}{8057}\cdot\frac{4029}{8057}}\le\frac{1}{2}$.

Adunând inegalitățile obținem $\sqrt{\frac{1\cdot 2}{3^2}}+\sqrt{\frac{2\cdot 3}{5^2}}+\sqrt{\frac{3\cdot 4}{7^2}}+.....+\sqrt{\frac{4028\cdot 4029}{8057^2}}\le 4028\cdot\frac{1}{2}=2014.$

b) $x=\sqrt{\frac{7}{1}+\frac{8}{2}+\frac{9}{3}+...+\frac{506}{500}-\left(\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+...+\frac{6}{500}\right)}=\sqrt{7+\left(\frac{8}{2}-\frac{6}{2}\right)+\left(\frac{9}{3}-\frac{6}{3}\right)+...+\left(\frac{506}{500}-\frac{6}{500}\right)}$

$x=\sqrt{7+\underbrace{1+1+...+1}_{499}}=\sqrt{506}=\sqrt{2\cdot 11\cdot 23}\Rightarrow x\notin\mathbb{Q}$.

Barem:

a) $\sqrt{\frac{1\cdot 2}{3^2}}=\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\le\frac{1+2}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}\le\frac{1}{2}$, ... , $\sqrt{\frac{4028}{8057}\cdot\frac{4029}{8057}}\le\frac{1}{2}$	**2 p**
Adunând inegalitățile obținem $\sqrt{\frac{1\cdot 2}{3^2}}+\sqrt{\frac{2\cdot 3}{5^2}}+\sqrt{\frac{3\cdot 4}{7^2}}+.....+\sqrt{\frac{4028\cdot 4029}{8057^2}}\le 4028\cdot\frac{1}{2}=2014$	**2 p**
b) $x=\sqrt{\frac{7}{1}+\frac{8}{2}+\frac{9}{3}+...+\frac{506}{500}-\left(\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+...+\frac{6}{500}\right)}=\sqrt{7+\left(\frac{8}{2}-\frac{6}{2}\right)+\left(\frac{9}{3}-\frac{6}{3}\right)+...+\left(\frac{506}{500}-\frac{6}{500}\right)}$	**1 p**
$x=\sqrt{7+\underbrace{1+1+...+1}_{499}}=\sqrt{506}$	**1 p**
Finalizare.	**1 p**

2. a) (4p) Arătaţi că, dacă $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}$, unde $b_1,b_2,b_3>0$, atunci $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}<\frac{a_3}{b_3}$.

Prof. Şlincu Gabriela

b) (3p) Câte numere de forma $\frac{\sqrt{\overline{abab}}}{\overline{ab}}$ verifică relaţia $2<\frac{\sqrt{\overline{abab}}}{\overline{ab}}<3$?

***

Soluție: a) Notăm: $\frac{a_1}{b_1}=k;\ \frac{a_3}{b_3}=h\Rightarrow k<h\Rightarrow a_1=kb_1<hb_1$ (1). Putem scrie $k<\frac{a_2}{b_2}<h\Rightarrow kb_2<a_2<hb_2$ (2) şi $k<\frac{a_3}{b_3}=h\Rightarrow kb_3<a_3=hb_3$ (3). Adunând membru cu membru $\Rightarrow k\left(b_1+b_2+b_3\right)<a_1+a_2+a_3<h\left(b_1+b_2+b_3\right)$.

Împărțind peste tot cu $b_1+b_2+b_3>0$, rezultă: $k<\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}<h\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}<\frac{a_3}{b_3}$.

b) Relaţia $2<\frac{\sqrt{\overline{abab}}}{\overline{ab}}<3$ este echivalentă cu $2<\sqrt{\frac{\overline{abab}}{\overline{ab}^2}}<3\Leftrightarrow 2<\sqrt{\frac{101}{\overline{ab}}}<3\Leftrightarrow 4<\frac{101}{\overline{ab}}<9$, de unde rezultă că $\frac{101}{9}<\overline{ab}<\frac{101}{4}$ adică $11<\overline{ab}\le 25$, deci sunt 14 numere.

Barem:

a) $\frac{a_1}{b_1}=k;\ \frac{a_3}{b_3}=h\Rightarrow k<h\Rightarrow a_1=kb_1<hb_1\quad(1)$	**1p**
$k<\frac{a_2}{b_2}<h\Rightarrow kb_2<a_2<hb_2\quad(2)$ şi $k<\frac{a_3}{b_3}=h\Rightarrow kb_3<a_3=hb_3\quad(3).$	**1 p**
Adunând membru cu membru, obținem: $k\left(b_1+b_2+b_3\right)<a_1+a_2+a_3<h\left(b_1+b_2+b_3\right)$	**1 p**
Împărțind peste tot cu $b_1+b_2+b_3>0$, rezultă: $k<\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}<h\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}<\frac{a_3}{b_3}$.	**1 p**
b) $2<\sqrt{\frac{\overline{abab}}{\overline{ab}^2}}<3\Leftrightarrow 2<\sqrt{\frac{101}{\overline{ab}}}<3\Leftrightarrow 4<\frac{101}{\overline{ab}}<9$	**1 p**
De unde $\frac{101}{9}<\overline{ab}<\frac{101}{4}$ adică $11<\overline{ab}\le 25$,	**1 p**
deci sunt 14 numere.	**1 p**

3. Fie triunghiul PQN şi M un punct oarecare pe latura $[PN]$ astfel încât $\frac{MN}{MP}=\frac{m}{n}$. Bisectoarea unghiului QMN intersectează latura $[NQ]$ în punctul C, bisectoarea unghiului QMP intersectează latura $[PQ]$ în punctul D, $MC\cap PQ=\{A\}$ și $MD\cap NQ=\{B\}$.

a) **(2p)** Arătaţi că $\frac{BN}{BQ}:\frac{AP}{AQ}=\frac{m}{n}$;

b) **(5p)** Aflați poziția punctului M pe latura $[PN]$ astfel încât CD să fie paralelă cu NP; apoi arătați că în acest caz patrulaterul $ABCD$ este trapez.

Prof. Alexandru Elena-Marcela

Soluție: a) În triunghiurile MQN şi PMQ, aplicând teorema bisectoarei exterioare $\Rightarrow\frac{BN}{BQ}=\frac{MN}{MQ};\ \frac{AP}{AQ}=\frac{MP}{MQ}$ (1)

$\Rightarrow\frac{BN}{BQ}:\frac{AP}{AQ}=\frac{MN}{MQ}:\frac{MP}{MQ}=\frac{MN}{MQ}\cdot\frac{MQ}{MP}=\frac{MN}{MP}=\frac{m}{n}$;

b) $CD\parallel NP\overset{T.Th.}{\Rightarrow}\frac{QD}{DP}=\frac{QC}{CN}$ (2) și aplicând teorema bisectoarei interioare în triunghiurile PMQ şi MQN avem $\frac{QD}{DP}=\frac{MQ}{MP}$ și $\frac{QC}{CN}=\frac{MQ}{MN}$, ţinând cont de relaţia (2) rezultă $MP=MN$ adică M este mijlocul lui [NP]. Din (1), cum $MP=MN$ rezultă $\frac{BN}{BQ}=\frac{AP}{AQ}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă $AB\parallel NP$, dar $CD\parallel NP$, rezultă $AB\parallel CD$, deci $ABCD$ trapez.

Barem:

a) În triunghiurile MQN şi PMQ, aplicând teor. bisectoarei ext. $\Rightarrow\frac{BN}{BQ}=\frac{MN}{MQ};\ \frac{AP}{AQ}=\frac{MP}{MQ}$ (1)	**1 p**
$\Rightarrow\frac{BN}{BQ}:\frac{AP}{AQ}=\frac{MN}{MQ}:\frac{MP}{MQ}=\frac{MN}{MQ}\cdot\frac{MQ}{MP}=\frac{MN}{MP}=\frac{m}{n}$;	**1 p**
b) $CD\parallel NP\overset{T.Th.}{\Rightarrow}\frac{QD}{DP}=\frac{QC}{CN}$ (2)	**1 p**
$\frac{QD}{DP}=\frac{MQ}{MP}$ și $\frac{QC}{CN}=\frac{MQ}{MN}$ ţinând cont de relaţia (2) rezultă $MP=MN$	**2 p**
Din (1), cum $MP=MN$ rezultă $\frac{BN}{BQ}=\frac{AP}{AQ}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă $AB\parallel NP$, dar $CD\parallel NP$, rezultă $AB\parallel CD$, deci $ABCD$ trapez.	**2 p**

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi O intersecţia diagonalelor sale. O dreaptă variabilă ce trece prin punctul O intersectează laturile (AB) şi (CD) în punctele M şi respectiv N. Să se arate că $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\text{constant}$.

***

<u>Soluţie</u>: Fie $CP \parallel MN; AQ \parallel MN;\ P,Q\in BD$. În $\triangle ABQ \xrightarrow{Thales} \frac{MA}{MB}=\frac{OQ}{OB}$, în $\triangle CPD \xrightarrow{Thales} \frac{ND}{NC}=\frac{OD}{OP}$, de unde $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\frac{OQ}{OP}\cdot\frac{OD}{OB}$ (1). În $\triangle AOQ \xrightarrow{Thales} \frac{OQ}{OP}=\frac{OA}{OC}$ (2). Din (1), (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\frac{OA}{OC}\cdot\frac{OD}{OB}$, care nu depinde de poziţiile punctelor M, N în care dreapta variabilă ce trece prin punctul O intersectează laturile (AB) şi (CD).

<u>Barem</u>:

Fie $CP \parallel MN; AQ \parallel MN;\ P,Q\in BD$	**1 p**
În $\triangle ABQ \xrightarrow{Thales} \frac{MA}{MB}=\frac{OQ}{OB}$, în $\triangle CPD \xrightarrow{Thales} \frac{ND}{NC}=\frac{OD}{OP}$,	**2 p**
de unde $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\frac{OQ}{OP}\cdot\frac{OD}{OB}$ (1)	**1 p**
În $\triangle AOQ \xrightarrow{Thales} \frac{OQ}{OP}=\frac{OA}{OC}$ (2)	**1 p**
Din (1), (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\frac{OA}{OC}\cdot\frac{OD}{OB}$	**1 p**
Finalizare	**1 p**