



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020
Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

- a) Se consideră expresia $E(a,b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2+b^2}$, unde a și b sunt numere reale strict pozitive.
Arătați că numărul $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ este rațional.
- b) Dacă x, y și z sunt numere reale astfel încât $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20 = 4x + 12y + 24z$, arătați că $x \in [-1,5]$, $y \in [0,3]$ și $z \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL II

- a) Considerăm numerele reale $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}$. Arătați că $(a+b+1)^2 + 4$ este pătrat perfect.
- b) Demonstrați că numărul $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ este irațional, pentru orice număr natural nenul n .

SUBIECTUL III

Fie $\triangle ABC$ echilateral de latură $2a$. Pe planul său se ridică perpendicularele AA' și CC' , $AA' = 2a\sqrt{3}$, $CC' = a\sqrt{3}$.

- a) Calculați distanța de la punctul C' la dreapta $A'B$.
- b) Determinați măsura unghiului dintre planele $(A'BC')$ și (ABC) .

SUBIECTUL IV

În cubul $ABCD A'B'C'D'$ notăm cu O' și O centrele fețelor $(A'B'C'D')$, respectiv $(BCC'B')$, iar M , S , T și Q sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AO]$, $[D'O']$, respectiv $[AA']$.

- a) Arătați că aria patrulaterului $D'CMQ$ este mai mare decât aria unei fețe a cubului.
- b) Dacă R este mijlocul segmentului OC , demonstrați că $(RST) \parallel (A'BC')$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.