

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 23 februarie 2018

CLASA a VIII-a

SUBIECTE

1. a) Arătați că numărul $a = (4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ este natural.
b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$, $a \neq -c$, $b \neq -c$ cu proprietatea $ab + bc + ca = 1009$.
Demonstrați că:
$$\frac{a^2 + b^2 + 2018}{a + b} + \frac{b^2 + c^2 + 2018}{b + c} + \frac{c^2 + a^2 + 2018}{c + a} = 4 \cdot (a + b + c).$$
2. a) Arătați că: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Fie $E(n) = 1 - \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} - \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} - \dots - \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $E(n) > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor AB , $B' C'$, respectiv DD' . Se dă $AB = 6 \text{ cm}$.
a) Calculați aria triunghiului MNP .
b) Aflați sinusul unghiului format de planele (MNP) și (MNC) .
4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC . Punctul M este mijlocul muchiei BC , măsura unghiului dintre dreptele SM și SA este egală cu 90° și $SA = 6\sqrt{2} \text{ cm}$.
a) Arătați că triunghiul SAC este dreptunghic.
b) Fie A', B' mijloacele muchiilor SA , respectiv SB , iar P și Q proiecțiile punctelor A' și respectiv B' pe planul (ABC) . Calculați aria triunghiului CPQ .

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timpul de lucru este de 3 ore.

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.