

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16.02.2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X - a

PROBLEMA 1.

- a) Să se arate că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{5}{3}$.
b) Să se determine numărul natural n pentru care $n < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 < n + 1$.

Barem de corectare.

- a) Verificare (1p);
b) Aplicăm inegalitatea mediilor și avem

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 \geq 4\sqrt[4]{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8} = 4\sqrt[4]{3} > 5 \quad (3p).$$

Dacă $x = \log_2 3$, atunci $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$. Cum $\log_3 4 = \frac{2}{x}$, $\log_4 6 = \frac{1+x}{2}$ și $\log_6 8 = \frac{3}{1+x}$, rezultă că $x + \frac{2}{x} + \frac{1+x}{2} + \frac{3}{1+x} < \frac{83}{15} < 6$. Deci $n = 5$ (3p).

PROBLEMA 2. Determinați numerele reale $a \leq 1$ și $b > 0$, pentru care ecuația

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{x^2 + b + 1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

are soluții reale.

Barem de corectare.

Pentru orice număr real x , $\frac{x^2 + b + 1}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + b}} \geq 2$ (3p).

Avem $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} \geq 2$, de unde rezultă $\sqrt[3]{a+x} \geq 2 - \sqrt[3]{a-x}$. Ridicăm la cub și notăm $\sqrt[3]{a-x} = t$. Deducem că $t^2 - 2t + \frac{4-a}{3} \leq 0$, deci $(t-1)^2 \leq \frac{a-1}{3}$ și astfel se impune $a \geq 1$ (3p).

Din ipoteză, obținem că $a = 1$, $t = 1$, $x = 0$, $b = 1$ (1p).

PROBLEMA 3. Considerăm familia de funcții $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \Gamma$, $f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- a) Demonstrați că f_α nu este surjectivă, pentru nicio valoare reală a lui α ;
b) Demonstrați că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât imaginea funcției f_α să aibă m elemente;
c) Demonstrați că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, funcția f_α este sau injectivă sau periodică.

Barem de corectare.

- a) Evident, f_0 nu este surjectivă. Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât f_α să fie surjectivă. Rezultă că $\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$, astfel încât $f_\alpha(n) = \cos \beta + i \sin \beta$, deci $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = \cos \beta + i \sin \beta \Leftrightarrow n\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pentru $\beta = 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $n_0\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Rezultă $n\alpha = \beta + n_0\alpha$, adică $n - n_0 = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Z}, \forall \beta \in \mathbb{R}$, contradicție. Deci f_α nu este surjectivă pentru nicio valoare reală a lui α **(2p)**.
- b) Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, și anume $\alpha = \frac{2\pi}{m}$, astfel ca $\text{Im } f_\alpha = \{1, \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha, \dots, \cos (m-1)\alpha + i \sin (m-1)\alpha\}$ **(2p)**.
- c) $f_\alpha(n_1) = f_\alpha(n_2) \Rightarrow \cos n_1\alpha + i \sin n_1\alpha = \cos n_2\alpha + i \sin n_2\alpha \Rightarrow n_1\alpha = n_2\alpha + 2k\pi \Rightarrow (n_1 - n_2)\alpha = 2k\pi$
 Dacă $\alpha = 0$, atunci $f_0(n) = 1$ și f este periodică. Dacă $\alpha \neq 0$ și $k = 0$ rezultă $n_1 = n_2$ și f_α este injectivă.
 Dacă $\alpha \neq 0$ și $k \neq 0$, rezultă $\frac{n_1 - n_2}{2k} = \frac{\pi}{\alpha}$. Dacă $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, atunci f_α este periodică cu perioada principală $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Dacă $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci $\frac{n_1 - n_2}{2k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, contradicție. Deci f_α este injectivă **(3p)**.

PROBLEMA 4. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile de afixe a, b, c , cu $|a| = |b| = |c| = R$. Înălțimea dusă din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D , de afix d .

- a) Exprimați d în funcție de a, b, c ;
- b) Fie mulțimea $\mathcal{R}_n = \left\{ z_k = R \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$, unde $n \geq 5$ este impar și fie $k, j, l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ fixate, două câte două distincte, astfel încât $a = z_k, b = z_j, c = z_l$. Este posibil ca d să fie element al mulțimii $\mathcal{R}_n$? Justificați răspunsul.

Barem de corectare.

- a) $AD \perp BC \Leftrightarrow \frac{a-d}{b-c} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{a-d}{b-c} = \frac{\bar{d}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}}$. Rezultă $\frac{a-d}{b-c} = \frac{a-d}{b-c} \left(-\frac{bc}{ad} \right)$. Avem $ad = -bc \Rightarrow d = -\frac{bc}{a}$ **(3p)**.

- b) Presupunem că $d \in \mathcal{R}_n$; din a) avem $d = -\frac{z_j z_l}{z_k} = -z_{j+l-k}$ **(1p)**.

Demonstrăm că dacă n este impar și $z \in \mathcal{R}_n$, atunci $-z \notin \mathcal{R}_n$.

Dacă $z \in \mathcal{R}_n$ există $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ astfel încât $z = R \left(\cos \frac{2m\pi}{n} + i \sin \frac{2m\pi}{n} \right)$, deci $-z = R \left(\cos \left(\frac{2m\pi}{n} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{2m\pi}{n} + \pi \right) \right)$. Rezultă $-z \in \mathcal{R}_n \Leftrightarrow \exists p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, astfel încât $2m\pi + n\pi = 2p\pi$ și n este par **(3p)**.

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.