

Olimpiada de matematică
Etapă locală, 28.02.2015
Clasa a X-a

Subiecte:

1. Fie $x, a, b, c > 1$. Să se arate că numerele $\log_{bc} x, \log_{ac} x, \log_{ab} x$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $(\log_x a)^2, (\log_x b)^2, (\log_x c)^2$ sunt în progresie aritmetică.
2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(f(x)) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se găsească o funcție care verifică relația din enunț.
 - b) Să se arate că $f(x + 1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$ nu este injectivă.
3. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{5^x + 12^x}} + \sqrt{x + 7} = \frac{14}{13} + \sqrt{x + 2}$$

4. Dacă $u, v \in \mathbb{C}$, să se demonstreze inegalitatea:

$$|1 + \bar{u}v|^2 \leq (1 + |u|^2)(1 + |v|^2).$$

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*