Barem de corectare OML Clasa a IX- a, 2014

1. Notăm $f(1) = a \in N^* \Rightarrow f(2) = \frac{2(a^3+a+1)}{a^2+a} - 1$..1p

Se obține $\frac{4a+2}{a^2+a} \in N^*$ 1p

Se obține $\frac{2}{a+1} \in N^*$, deci a = 1...1p

f(2) = 2 ....1p

Presupunem $f(k) = k$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$ 1p

Obține din relația din enunț $f(n+1) = \frac{n^3+2n^2}{2n^2} \cdot 2 - 1 = n+1$ deci, cf. inducției matematice

$f(n) = n$, $\forall\ n \in N^*$ 2p

2. Din inegalitatea mediilor $\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} = \sqrt{\frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}\right)$ și

analoagele...4p

Se adună cele 3 inegalități și obține în membrul drept

$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c}\right) + \left(\frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\right)\right] = \frac{3}{2}$.......................................2p

Avem egalitate dacă și numai dacă avem egalitate în fiecare din cele 3 inegalități,

adică pentru a = b = c...1p

3. Notăm $\overline{AB} = \bar{u}$ și $\overline{AC} = \bar{v}$ 1p

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{u})$ 1p

Din teorema medianei în $\Delta EFM \Rightarrow \overline{MR} = \frac{1}{2}(\overline{ME} + \overline{MF})$ 1p

$\overline{ME} = -\frac{3}{5}\bar{u}$, $\overline{MF} = \frac{4}{5}\bar{v} - \frac{1}{2}\bar{u}$ 1p

Se obține $\overline{MR} = \frac{2}{5}(\bar{v} - \bar{u})$ 1p

Se obține $\overline{MR} = \frac{4}{5}\overline{MN}$, deci $\overline{MR}$, $\overline{MN}$ vectori coliniari...2p

4. Fie r = rația progresiei aritmetice, q = rația progresiei geometrice ⇒ b = a + r,

c = a + 2r, d = a + 3r 1p

$b - 1 = (a+1)q$, $c - 1 = (a+1)q^2$, $d + 3 = (a+1)q^3 \Rightarrow \begin{cases} a + r - 1 = (a+1)q \\ a + 2r - 1 = (a+1)q^2 \\ a + 3r + 3 = (a+1)q^3 \end{cases}$....1p

Din ecuațiile 1 și 2 ⇒ $r = q(q-1)(a+1)$ 1p

Din ecuațiile 2 și 3 ⇒ $r + 4 = (a+1)q^2(q-1) = rq \Rightarrow q = \frac{r+4}{r}$ 1p

Se înlocuiesc în sistem r,q ⇒ $r = 4$ 1p

⇒ q = 2 ⇒ a = 1 ....1p

Numerele sunt a = 1, b = 5, c = 9, d = 13 .... 1p