

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

Barem – Clasa a V-a

SUBIECTUL I (7p)

- a) Arătați că numărul $27^{10} \cdot 32^{11} - 16^7 \cdot 6^{27} \cdot 23$ este cub perfect.
- b) Arătați că numărul $2 \cdot 2019^{2020} - 2020 \cdot 2019^{2019} - 2018 \cdot 2019^{2018}$ este pătrat perfect.
- c) La împărțirea unui număr natural nenul n la 20 se obține restul egal cu pătratul câtului.
- Aflați valorile posibile ale lui n .

Rezolvare

- a) $27^{10} \cdot 32^{11} - 16^7 \cdot 6^{27} \cdot 23 = 3^{30} \cdot 2^{55} - 2^{28} \cdot 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 23 =$ 1p
 $= 3^{27} \cdot 2^{55} \cdot (3^3 - 23) = 3^{27} \cdot 2^{55} \cdot 4 = 3^{27} \cdot 2^{57} = (3^9 \cdot 2^{19})^3$ este cub perfect 1p
- b) $2 \cdot 2019^{2020} - 2020 \cdot 2019^{2019} - 2018 \cdot 2019^{2018} = 2019^{2018} \cdot (2 \cdot 2019^2 - 2020 \cdot 2019 - 2018) = 2019^{2018} \cdot 2018^2 = (2019^{1009} \cdot 2018)^2$ este pătrat perfect 3p
- c) Restul poate fi 0, 1, 4, 9 sau 16 1p
 n poate fi 21, 44, 69, 96 1p

SUBIECTUL II (7p)

- La un concurs de matematică fiecare elev a avut de rezolvat 40 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect elevul primește 5 puncte iar pentru fiecare răspuns greșit i se scad 2 puncte. Știind că elevii au dat răspunsuri la toate problemele, aflați:
- a) ce punctaj a primit un elev care a răspuns corect la 32 de probleme ?
- b) la câte probleme a răspuns corect un elev care a obținut 102 puncte ?

Rezolvare

- a) Punctajul este $32 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 144$ de puncte 2p
- b) Dacă ar fi răspuns corect la toate problemele ar fi obținut $40 \cdot 5 = 200$ puncte 1p
Pentru fiecare răspuns greșit punctajul scade cu $5 + 2 = 7$ puncte 2p
A răspuns greșit la $(200 - 102) : 7 = 14$ probleme. 1p
A răspuns corect la 26 probleme. 1p

SUBIECTUL III (7p)

a) Scrieți numărul 28 ca sumă dintre un cub perfect și un pătrat perfect.

b) Arătați că există numere naturale nenule a și b astfel încât $28^{2017} = a^3 + b^2$.

Rezolvare

a) $28 = 27 + 1 = 3^3 + 1^2$. 2p

b) $28^{2017} = 28^{2016} \cdot 28 = 28^{2016} \cdot (3^3 + 1^2) =$ 2p
 $= (28^{672} \cdot 3)^3 + (28^{1008})^2$ 2p
 $a = 28^{672} \cdot 3 ; b = 28^{1008}$ 1p

SUBIECTUL IV (7p)

Pe o masă se așază pe rând un bețișor roșu, apoi două bețișoare verzi, trei bețișoare roșii, apoi patru verzi și procedeul continuă.

a) În primele 100 de bețișoare, câte sunt verzi și câte roșii?

b) Ce culoare are al 2019-lea bețișor?

Rezolvare

a) Numărul de bețișoare crește $1+2+3+\dots+n = n(n+1):2$ 1p
Suma Gauss cea mai apropiată de 100 este $1+2+3+\dots+13 = 13 \cdot 14:2 = 91$. 1p
Numărul de bețișoare roșii este $1+3+5+7+\dots+13 = 49$, numărul de bețișoare verzi $100-49=51$. 1p

b) Estimând suma Gauss cea mai apropiată de 2019 avem $1+2+\dots+63 = 2016$. 2p
Ultima grupă completă este impară, deci cu bețișoare roșii, și rămân 3 bețișoare verzi.
Deci al 2019 lea bețișor este verde. 2p