

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a VI-a

Barem de evaluare și notare

1. Un număr natural împărțit la 9 dă restul 7 și împărțit la 5 dă restul 2. Ce rest obținem dacă împărțim numărul la 45?

Aplică teorema împărțirii cu rest: $n = 9 \cdot c_1 + 7$ și $n = 5 \cdot c_2 + 2$	2p
$10 \cdot n = 90 \cdot c_1 + 70$, $9 \cdot n = 45 \cdot c_2 + 18$	2p
$n = 45 \cdot (2 \cdot c_1 - c_2) + 52$	1p
$n = 45 \cdot (2 \cdot c_1 - c_2 + 1) + 7$	1p
Finalizare: Rest=7	1p
Observație: Se va puncta la maxim orice soluție alternativă corectă	

2. Victor are 200 de bile ,albe sau negre.El isi dorește doar bile albe.Pentru o bilă albă îi dă fratele său,Mihai, 4 bile negre.In final, Victor are 80 de bile albe.Stabiliți câte bile din fiecare culoare avea la început Victor?

Notăm cu n numărul de bile albe date la schimb de către Mihai lui Victor	1p
Vom obține ecuația $200 - 4n + n = 80$.	3p
Deducem $n = 40$	2p
Finalizare: Victor avea 160 de bile negre și 40 de bile albe	1p

3. Un număr natural îl numim număr centenar dacă produsul cifrelor sale este 100.
i) Stabiliți dacă în perioada 1918-2018 există numere centenare. Justificați răspunsul.
ii) Demonstrați că cel mai mare număr centenar de 2017 cifre este divizibil cu 3.

i) Notăm P produsul cifrelor numărului centenar $\Rightarrow P = 100$. În perioada 1918-1999, numerele conțin cifra 9 $\Rightarrow P:9$ iar 100 nu este divizibil cu 9. În perioada 2000-2018, numerele conțin cifra 0 $\Rightarrow P = 0$, nu convine enunțului Deci, nu există numere centenare în perioada menționată.	3p
ii) Cum $100 = 2^2 \cdot 5^2$, numărul centenar de 2017 cifre conține fie două cifre 2, două cifre 5 și 2013 cifre de 1, fie o cifră de 4, două cifre de 5 și 2014 cifre de 1.	4p

Cel mai mare număr format este $\Rightarrow 554\ 11...1 : 3$ și cum

2014 cifre

$$5 + 5 + 4 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{2014 \text{ cifre}} = 2025 : 3 \Rightarrow 554\ 11...1 : 3$$

2014 cifre

4. Se consideră un punct A_1 aparținând unei drepte d . Pe una din semidreptele determinate de A_1 se consideră punctele $A_2, \dots, A_6$ (nu neapărat în această ordine) astfel încât lungimile segmentelor $[A_1A_2], [A_2A_3], [A_3A_4], [A_4A_5], [A_5A_6]$ sunt exprimate prin numere naturale consecutive și $A_1A_2 = a$, $A_1A_6 = 100$. Determinați valoarea minimă și maximă a numărului a .

Minimul lui a se obține în situația în care A_1 și A_2 sunt vecine, iar A_1 și A_6 sunt extremități, pentru aranjarea $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6$ $\Rightarrow a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 100 \Rightarrow a = 18$.	2p
Maximul lui a se obține în situația în care A_2 este cât mai depărtat de A_1 iar A_1 și A_6 sunt așezate unul după altul și celelalte puncte sunt dispuse respectând următoarele reguli: A_3 nu poate fi între A_1 și A_2, A_4 nu poate fi între A_2 și A_3, A_5 nu poate fi între A_3 și A_4, A_6 nu poate fi între A_4 și A_5 iar între A_2 și A_3 nu pot apărea ambele extremități ale segmentului $[A_4A_5]$ și deasemenea între A_1 și A_2 nu pot apărea ambele extremități ale intervalelor $[A_4A_5]$, $[A_3A_4]$ și $[A_5A_6]$.	3p
Respectând aceste restricții identificăm următoarele ordini $A_1 - A_6 - A_2 - A_5 - A_3 - A_4$ care ne dă $a=104$, sau $A_1 - A_6 - A_4 - A_2 - A_3 - A_5$ care ne dă $a = 102$ și concluzia $a=104$	2p