



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 01 februarie 2018

CLASA A VI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I

Aflați numărul $n \in \mathbb{N}^*$ știind că: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{4036}{2019}$.

REZOLVARE

Obține $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{4036}{2019}$ 2 puncte

Obține $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{2018}{2019}$ 2 puncte

Obține $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{2018}{2019}$ 2 puncte

Finalizare $n = 2018$ 1 punct

Subiectul II

Se consideră numerele $a = 4n+5$ și $b = 2n+1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pentru $n = 3p+2$, $p \in \mathbb{N}$, demonstrați că $[a, b] = a \cdot b$. ($[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b)
- Pentru $n \leq 2018$, aflați câte perechi de numere de forma anterioară **nu** sunt prime între ele.

REZOLVARE

- Pentru $a = 12p+13$, $b = 6p+5$ și $d = (a, b)$, obține $d \in \{1, 3\}$ 1 punct
Justifică $d=3$ nu convine1 punct
Folosind $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$ și $d = 1$, obține cerința1 punct
- Din $d \mid 4n+5$ și $d \mid 2n+1$, obține $d \mid 3 \Leftrightarrow d \in \{1, 3\}$ 1 punct
Obține $d \mid 3 \Leftrightarrow n = 3t+1$, $t \in \mathbb{N}$ 2 puncte
Finalizare $t \in \{0, 1, 2, \dots, 672\}$, deci 673 perechi verifică cerința.....1 punct



Subiectul III

Pe o dreaptă d se consideră punctele $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \in \mathbb{N}$, în această ordine, astfel încât $A_1A_k = 54\text{cm}$. Lungimile segmentelor $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k$ sunt egale sau cu 5cm sau cu 11cm . Arătați că există un segment de tip A_iA_j , $1 \leq i < j \leq k$, de lungime 27cm .

REZOLVARE

Obține existența a 4 segmente de lungime 11cm și a 2 segmente de lungime 5cm 3 puncte
 Obține $27\text{cm} = 2 \cdot 11\text{cm} + 5\text{cm}$ 1 punct
 Argumentează existența unei configurații formate din segmente alăturate cu lungimile 5, 11, 11 sau 11, 5, 11 sau 11, 11, 5.....3 puncte

Subiectul IV

Fie $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COA$ trei unghiuri proprii în jurul punctului O , cu interioarele disjuncte două câte două, care îndeplinesc condițiile: $\frac{m(\angle BOC)}{m(\angle AOB)} = \frac{25y}{13x}$ și $m(\angle COA) - m(\angle AOB) = (40z - 13x)^\circ$, unde x, y și z sunt numere naturale prime care verifică relația $13x + 25y + 40z = 360$. Dacă punctele M și N sunt situate în interiorul unghiului $\angle BOC$ astfel încât $\angle AOM$ și $\angle CON$ sunt unghiuri drepte, atunci demonștrați că bisectoarele unghiurilor $\angle MON$ și $\angle COA$ sunt semidrepte opuse.

REZOLVARE

Din relația $13x + 25y + 40z = 360$ obține $x = 5, y = 7, z = 3$ 2 puncte
 Găsește $m(\angle AOB) = 65^\circ, m(\angle BOC) = 175^\circ, m(\angle COA) = 120^\circ$ 2 puncte
 Demonstrează că bisectoarele unghiurilor $\angle MON$ și $\angle COA$ sunt semidrepte opuse 3 puncte

NOTĂ: Orice rezolvare corectă, diferită de barem, va primi punctajul corespunzător.