

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a XII-a

Subiectul 1. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \int_0^n \frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + x + 1} dx \right).$$

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu proprietatea că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

admite primitive.

Subiectul 3. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2x-2 & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup și $(G, \cdot) \sim (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Subiectul 4. Fie A inel cu proprietatea că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.
Arătați că: a) $2x = 0$, oricare ar fi $x \in A$; b) $xy = yx$, oricare ar fi $x, y \in A$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.