

Barem clasa a VIII a

SUBIECTUL I

$$(\overline{aa} + \overline{bb})^{\frac{\overline{ab}}{2}} = (10a + a + 10b + b)^{\frac{\overline{ab}}{2}} = \left[(11a + 11b)^{\frac{1}{2}} \right]^{\overline{ab}} = \sqrt{11(a+b)}^{\overline{ab}}.$$

Rezultă perechile de numere $(a, b) \in \{11^c, \quad c \text{ este număr impar}\}$. În acest caz, singura valoare posibilă a sumei este $a+b=11$, în celelalte cazuri, a și b devin numere (nu cifre).

Vom obține perechile de numere naturale $(a, b) \in \{(3, 8); (8, 3); (4, 7); (7, 4); (5, 6); (6, 5)\}$.

Pentru ca $\sqrt{11(a+b)}^{\overline{ab}}$ să fie pătrat perfect trebuie ca $\overline{ab}$ să fie număr par, de aici $b \in \{4, 6, 8\} \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 8); (5, 6); (7, 8)\}$.

SUBIECTUL II

a) Din egalitatea dată, prin ridicare la pătrat obținem

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = \sqrt{24} + \sqrt{40}$$

Cum $0 < x < y < z < t$, avem exemplul

$$(24, 40, 60, 100).$$

b) Trebuie să arătăm că $\frac{1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t}}{5} > 0,4\sqrt{2} + 0,4\sqrt{3} + 0,4\sqrt{5} =$
 $= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{5}$, adică

$$1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} > 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$1 + (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t}) > 2\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t}}$$

$$(\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t}})^2 - 2\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t}} + 1 > 0,$$

$(\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t}} - 1)^2 > 0$, adevărat deoarece

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 > 1.$$

Subiectul III

a) Realizarea corectă a desenului-0,5 puncte

MM'- linie mijlocie în tr. dr. ABC $\Rightarrow$ MM' este perpendiculară pe BC (1 punct),

M' proiecția lui M pe planul BCD

Atunci unghiul format de MN cu planul BCD este unghiul format de MN cu NM' (1 punct)

Se aplică reciproca Toremei celor 3 perpendiculare $\Rightarrow$ M'N este perpendicular pe BD și observăm că e paralelă cu înălțimea tr. MNM' este dreptunghic isoscel, măsura unghiului format de MN cu planul BCD este de 45° (2 puncte)

- a) Triunghiurile dreptunghice ABN și CPN, unde CP este înălțimea triunghiului BCD sunt congruente (0,5 puncte) $\Rightarrow AN \equiv NC \Rightarrow tr. NAC$ este isoscel, iar M mijlocul laturii AC, deci NM este mediana dusă din vârful triunghiului isoscel $\Rightarrow$ NM este perpendiculară pe AC (1 punct)
 $\Rightarrow$ distanța de la punctul N la muchia AC este NM, care se află din triunghiul dreptunghic MM'N aplicând T. Pitagora $\Rightarrow nm = 4\sqrt{2}$ cm (1 punct)

SUBIECTUL IV

1. demonstrează $\angle PCA \equiv \angle CAP$

2p

2. demonstrează $\Delta AVE \equiv \Delta CVF$ (LUL)

1p

3. demonstrează cu RTThales $EF \parallel AC$ ①

1p

4. demonstrează (analog 1,2 , 3) : $\angle QDB \equiv \angle QBD$; $\Delta VDT \equiv \Delta VBS$ (LUL); $ST \parallel BD$ ②

2p

5. din ① și ② $\Rightarrow m(\angle (EF, ST)) = m(\angle AC, DB) = 90^\circ$

1p

Baremul este orientativ, orice alta varianta corecta se va puncta corespunzator